Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 1

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 22.10., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1. Orthogonalität von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist eine Äquivalenzrelation.	☐	☐
2. $G_{p,v} = G_{q,w}$ genau dann wenn es $t, \alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $p = q + tw$ und $v = \alpha w$.	☐	☐
3. Sei L eine Gerade. Die Menge der Normalenvektoren zu L bildet einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
4. Jede Gerade $G_{p,v}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
5. Jeder eindimensionale Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist eine Gerade.	☐	☐
6. Jede euklidische Bewegung $f \in E(2)$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Sinne der linearen Algebra.	☐	☐
7. Zu jeder euklidischen Bewegung $f \in E(2)$ gibt es ein $f^{-1} \in E(2)$, sodass $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$.	☐	☐
8. Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine euklidische Bewegung.	☐	☐
9. Sei G eine Gerade und $f \in E(2)$. Dann ist auch $f(G)$ eine Gerade.	☐	☐
10. Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation.	☐	☐

Aufgabe 2 – *Kollinearität* [10 Punkte]

Die Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ heißen *kollinear*, wenn es eine Gerade L gibt, sodass $P_i \in L$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(i) Sei $n \geq 2$. Wir betrachten n Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), \ldots, P_n = (p_{nx}, p_{ny})$. Zeigen Sie, dass die Punkte kollinear sind, genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & \ldots & p_{nx} \\ p_{1y} & p_{2y} & \ldots & p_{ny} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \leq 2$$

(ii) Wir betrachten drei Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), P_2 = (p_{2x}, p_{2y}), P_3 = (p_{3x}, p_{3y}) \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie dass diese Punkte kollinear sind, genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

(iii) Zeigen Sie dass die Matrix im Punkt (i) Rang 1 hat, genau dann, wenn alle Punkte gleich sind: $P_1 = \cdots = P_n$.

Aufgabe 3 – *Darstellungen von Geraden* [10 Punkte]

(i) Die folgenden Mengen sind Geraden in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie eine Beschreibung in der Form $G_{p,v}$ wie in der Vorlesung:

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 1 = 0\}, \quad L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2024x - 2024y + 2024 = 0\}.$$

(ii) Betrachten Sie die folgenden Geraden und finden Sie eine Darstellung durch eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ wie in (i):

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Bestimmen Sie die Punkte

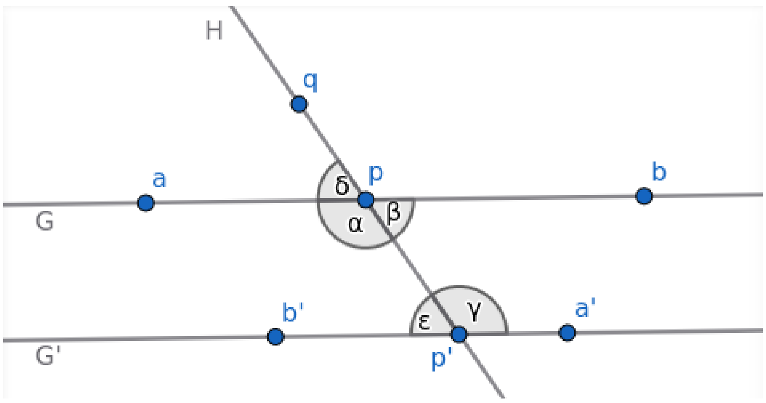
$$\{P_{13}\} = L_1 \cap L_3, \quad \{P_{24}\} = L_2 \cap L_4.$$

(iv) Finden Sie eine Gleichung wie in (i) und eine Darstellung als $G_{p,v}$ für die Gerade $G(P_{13}, P_{24})$.

Aufgabe 4 – [10 Punkte]

Im Folgenden seien $G, G' \subseteq \mathbb{R}^2$ parallele Geraden, H eine Gerade mit $G \cap H = \{p\}$ und $G' \cap H = \{p'\}$. Weiter seien $a, b \in G \setminus \{p\}$ auf verschiedenen Seiten von p und $a', b' \in G' \setminus \{p'\}$ auf verschiedenen Seiten von p', sodass außerdem a und a' auf verschiedenen Seiten von H liegen. Weiter sei $q \in H \setminus \{p, p'\}$, sodass p zwischen q und p' liegt. Wir definieren die folgenden Winkelgrößen:

$$\alpha = \sphericalangle(a, p, p') \qquad \beta = \sphericalangle(b, p, p') \qquad \gamma = \sphericalangle(a', p', p)$$
$$\delta = \sphericalangle(a, p, q) \qquad \varepsilon = \sphericalangle(b', p', p)$$



Beweisen Sie die folgenden Sätze mit unserer Definition von Winkel. Achten Sie besonders auf eine saubere Argumentation in der Sprache der Vorlesung!

(i) (Nebenwinkelsatz) $\alpha + \beta = \pi$

(ii) (Scheitelwinkelsatz) $\beta = \delta$

(iii) (Stufenwinkelsatz) $\delta = \epsilon$

(iv) (Wechselwinkelsatz) $\alpha = \gamma$ und $\beta = \varepsilon$