Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

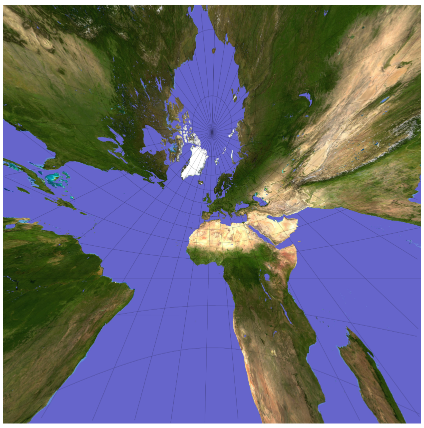
Blatt 10

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 07.01., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **2 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	Wahr	Falsch
1. Die Funktion $\mathcal{A} : (0, 2\pi/3) \to \mathbb{R}$, welche jedem a die Fläche des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a zuordnet, lässt sich zu einer linearen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen.	☐	☐
2. Eine Teilmenge $K \subseteq S^2$ ist ein Kreis genau dann wenn $K \neq \emptyset$ und nicht nur aus einem Punkt besteht und K der Schnitt von S^2 mit einer Menge $K_r(M) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d_E(x, M) = r\} \subseteq \mathbb{R}^3$ für geeignete $r > 0$ und $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist.	☐	☐
3. Gilt in S^2 dass $K_r(M) = K_{\pi-r}(M')$, so folgt $M = -M'$.	☐	☐
4. Jedes sphärische Dreieck besitzt genau einen Umkreis.	☐	☐
5. Stereographische Projektion bildet sphärische Dreiecke auf euklidische Dreiecke ab.	☐	☐
6. Nimmt man als Bildebene $T_h = \{x_1 = h\}$ für ein $h \neq 1$ statt $T = T_{-1}$, so skaliert man das Bild der stereographischen Projektion.	☐	☐
7. Sei $K \subseteq S^2$ ein Kreis, welcher unter stereographischer Projektion auf einen Kreis $K' \subseteq \mathbb{R}^2$ abgebildet wird. Dann ist der Mittelpunkt von K' das Bild des Mittelpunkts von K.	☐	☐
8. Die Karte unten ist eine stereographische Projektion.	☐	☐
9. Der Lambert-Entwurf erhält Abstände.	☐	☐
10. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der S^2 wird zu einer Geraden unter der Mercator-Projektion.	☐	☐



Aufgabe 2 – *Flächentreue Projektionen* **[10 Punkte]**

Der Lambert-Entwurf ist flächentreu, hat aber Format π:1 – nicht besonders ästhetisch. Das korrigieren wir nun.

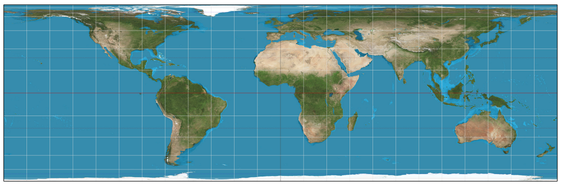
(i) Zeigen Sie, dass für alle Konstanten $S > 0$ gilt:

$$v_S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{S}x \\ \frac{y}{\sqrt{S}} \end{pmatrix}$$

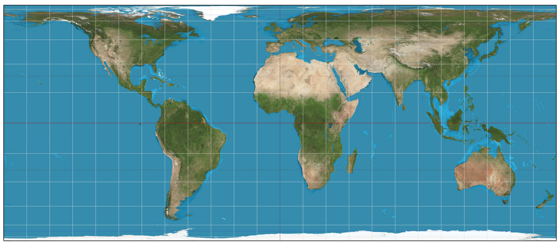
erhält die Fläche von Gebieten, deren Rand durch eine stetigen, stückweise glatten, einfach geschlossenen Kurve parametrisiert wird.

(ii) Folgern Sie, dass die Verknüpfung $v_S \circ \psi_L$ des Lambert-Entwurfs mit der Abbildung v_S auch flächentreu ist.

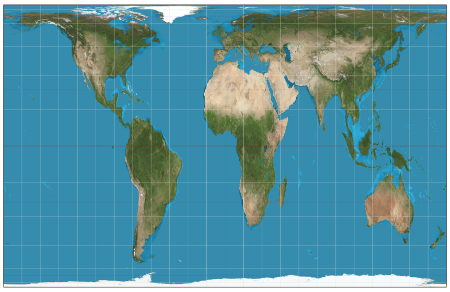
Damit kann man also S^2 flächentreu auf ein Rechteck mit Fläche 4π und beliebigem Format abbilden:



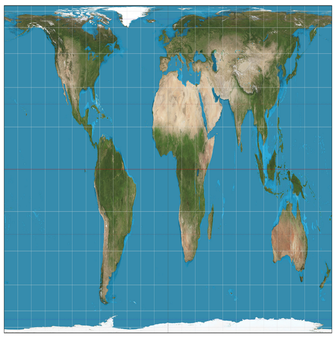
Lambert-Entwurf
$S = 1$, Format π:1



Behrmann-Projektion
$S = \frac{3}{4}$, Format $\frac{3\pi}{4}$:1



Gall-Peters Projektion
$S = \frac{1}{2}$, Format $\frac{\pi}{2}$:1



Tobler's quadratische Welt
$S = \frac{1}{\pi}$, Format 1:1

Sei $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $p = \psi(\theta, \varphi) \in S^2$. Wir sagen, dass F in p *verzerrungsfrei* ist wenn $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \theta} & \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{pmatrix}(p)$ ein Vielfaches einer orthogonalen 2×2-Matrix ist. Die Interpretation ist, dass ein kleiner Kreis um einen verzerrungsfreien Punkt unter F näherungsweise auf einen Kreis abgebildet wird.

(iii) Bestimmen Sie für $v_S \circ \psi_L$ den Ort in S^2 der verzerrungsfreien Punkte. Zeichen Sie das Bild dieses Ortes in die vier Karten oben ein. Beachten Sie, dass $\theta \in [0, \pi]$ liegt.

Aufgabe 3 – *Zirkel und Lineal auf der Sphäre* **[15 Punkte]**

Wir modifizieren die Euklids Regeln für die Zirkel und Lineal Konstruktion marginal, um damit auch auf der Sphäre S^2 arbeiten zu können. Man darf folgendes:

(i) Einen beliebigen Punkt in S^2 markieren.

(ii) Einen beliebigen Punkt auf bereits konstruierten Großkreis(bög)en oder sphärischen Kreisen markieren.

(iii) Durch zwei Punkte x und y mit $0 < d_S(x, y) < \pi$ den Großkreis oder einen Großkreisbogen durch diese Punkte zeichnen.

(iv) Schnittpunkte von Großkreis(bög)en und sphärischen Kreisen markieren.

(v) Einen sphärischen Kreis um einen markierten Punkt durch einen markierten Punkt zeichnen.

Auf der Sphäre sind die Konstruktionsregeln 1 und 2 fast wichtiger als in $\mathbb{R}^2$: Gegeben zwei Punkte $A \neq B$ in der euklidischen Ebene, so kann man mit Zirkel und Lineal unendlich viele weitere Punkte konstruieren, ohne willkürlich neue Punkte markieren zu müssen. Zeigen Sie dagegen für die Sphäre:

(i) Seien A und B markierte Punkte auf der Sphäre. Wenn Sie Konstruktionsregel 1 und 2 nicht nutzen dürfen, dann können durch beliebig viele Anwendungen der Regeln 3, 4, und 5 maximal

- 2 Punkte (nämlich A und B) konstruiert werden, falls $d_S(A, B) = \pi$.
- 6 Punkte (inklusive A und B) konstruiert werden, falls $d_S(A, B) = \pi/2$.
- 3 Punkte (inklusive A und B) konstruiert werden, falls $d_S(A, B) = 2\pi/3$.

Ab jetzt dürfen alle fünf Konstruktionsregeln benutzt werden. Überzeugen Sie sich davon[1], dass sich Euklid's Beweis von Proposition I.1 (gleichseitiges Dreieck konstruieren) auf die Sphäre überträgt: Gegeben zwei Punkte A und B mit $0 < d_S(A, B) < 2\pi/3$ kann man ein gleichseitiges Dreieck mit Grundseite den kurzen Großkreisbogen von A nach B konstruieren.

(ii) Warum scheitert eine direkte Anpassung von Euklids Beweis wenn $d_S(A, B) \geq 2\pi/3$? Können Sie den Beweis modifizieren, sodass Sie auch in diesem Fall ein gleichseitiges Dreieck konstruieren können?

(iii) Gegeben einen Großkreis K und $A \in K$. Konstruieren Sie einen Großkreis K' durch A welcher K senkrecht schneidet. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

(iv) Beschreiben Sie die Zirkel und Lineal Konstruktion des Polardreiecks eines sphärischen Dreiecks (A, B, C).
Hinweis: Das Vorzeichen-Yoga in der Definition des Polardreiecks kann man geometrisch wie folgt zusammenfassen: A' ist derjenige Punkt aus $\{\pm\frac{B\times C}{||B\times C||}\}$, welcher auf der gleichen Seite von $G(B, C)$ liegt wie A. Analog für B' und C'.

[1] „Sich überzeugen“ heißt immer, dass hier nichts abgegeben werden muss.