

Blatt 11

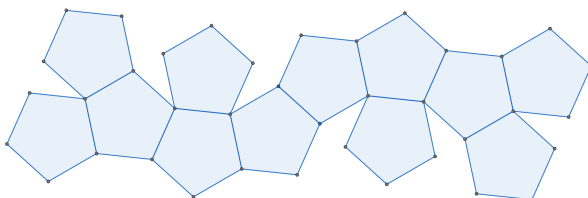
Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 14.01., 16:00.
 Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
 Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – Wahr oder falsch?

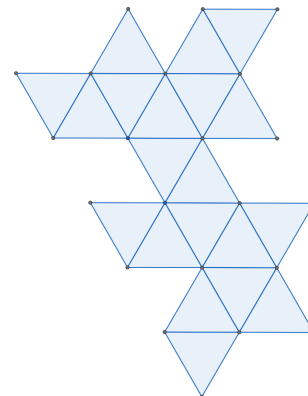
[10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r - f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

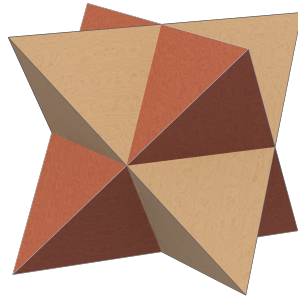
| Aussage | Wahr | Falsch |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. Werden zwei konzentrische Kreise $K, K' \subseteq S^2$ unter stereographischer Projektion wieder auf Kreise abgebildet, so sind die Bilder ebenfalls konzentrisch. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Der Mittelpunkt eines sphärischen Kreises $\subseteq S^2$ ist eindeutig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Eine nicht-leere Seite eines Polytops $\subseteq \mathbb{R}^3$ ist selbst wieder ein Polytop im \mathbb{R}^3 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Sei P ein 3-dimensionales Polytop. Sind alle Flächen von P kongruente regelmäßige n -Ecke (also n ist global das gleiche), dann ist P ein platonischer Körper. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Netz 1 ist ein Dodekaeder-Netz. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Netz 2 ist ein Ikosaeder-Netz. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Das Sternoktaeder (s.u.) entsteht, wenn man auf jede Fläche des Oktaeders ein Tetraeder aufsetzt. Das Sternoktaeder ist zwar kein platonischer Körper, aber immerhin ein 3-dimensionales Polytop. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Affine Abbildungen erhalten Polytope. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. Jedes 2-dimensionale Polytop hat Euler-Charakteristik 1. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine konvexe Menge. Dann ist $M \cap S^2$ auch konvex. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Netz 1.



Netz 2.



Sternoktaeder (die Farben sind rein dekorativ).

Aufgabe 2 – Inversion am Kreis

[12 Punkte]

Sei $\rho_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol und $\rho_S = S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Südpol (mit Bildebene auf Höhe 1). Wir definieren die *Inversion am Kreis*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \rho_S \circ \rho_N^{-1}(x). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Ψ bijektiv.

(i) Zeigen Sie, dass $\Psi(x) = \frac{4}{\|x\|^2}x$ ist.

(ii) Sei

$$\mathcal{G}_E = \{G \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid G \text{ ist eine Gerade in } \mathbb{R}^2\}$$

die Menge der euklidischen Geraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Beschreiben Sie die Menge

$$\mathcal{G}_M = \{\Psi(H) \mid H \in \mathcal{G}_E\}.$$

(iii) Wir definieren eine Inzidenz- und Anordnungsrelation für das System $\mathcal{M}' = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{G}_M)$ wie folgt.

- $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist inzident zu $H \in \mathcal{G}_M$ genau dann wenn $p \in H$.
- Seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann liegt q zwischen p und r genau dann wenn $\Psi^{-1}(q)$ zwischen $\Psi^{-1}(p)$ und $\Psi^{-1}(r)$ im euklidischen Sinne liegt.

Untersuchen Sie, welche der Inzidenz- und Anordnungsaxiome für \mathcal{M}' mit diesen Definitionen gelten. Geben Sie Gegenbeispiele für die Axiome, welche nicht gelten.

(iv) Definieren Sie eine Erweiterung der Geometrie \mathcal{M}' um einen Punkt ∞ , sowie eine Anpassung der Definitionen der Geraden, Inzidenz und Anordnung, sodass die resultierende Geometrie \mathcal{M} alle Axiome erfüllt.

Anmerkung: Erweitert man im letzten Schritt auch Ψ um die Vorschrift $\Psi(0) = \infty$, so liefert Ψ einen Isomorphismus zwischen der resultierenden Geometrie \mathcal{M} und der euklidischen Ebene.

Aufgabe 3 – Darstellungen von Polytopen

[10 Punkte]

Wir betrachten das folgende 2-dimensionale Polytop¹

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei die Ungleichung zeilenweise zu lesen ist.

- (i) Zeichnen Sie P und Schreiben sie P als $\text{Conv}(V)$ für $V \subseteq \mathbb{R}^2$ minimal.

Umgekehrt, sei nun

$$Q = \text{Conv} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- (ii) Zeichnen Sie Q und schreiben Sie Q als Schnitt einer minimalen Menge von affinen Halbräumen.

Aufgabe 4 – Hyperbolische Funktionen

[8 Punkte]

Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen*

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \cosh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & t &\longmapsto \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{aligned}$$

genannt *Sinus hyperbolicus* bzw. *Kosinus hyperbolicus*. Beweisen Sie:

- (i) \sinh und \cosh sind unendlich oft stetig differenzierbar und $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.
- (ii) Symmetrien: $\sinh(-t) = -\sinh(t)$ und $\cosh(-t) = \cosh(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\cosh(0) = 1$ und \cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.
- (iv) $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (v) Additionstheoreme: $\sinh(s+t) = \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t)$ und $\cosh(s+t) = \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Ein durchhängendes Seil hat unter seinem Eigengewicht die Form eines Kosinus hyperbolicus — **nicht** die einer Parabel! Unter Last (z.B. bei einer Hängebrücke) bilden die Tragseile aber durchaus eine Parabel. Diesen Unterschied scheinen Schulbücher in ihren pseudo-realiitätsbezogenen Aufgaben zu quadratischen Funktionen konsequent zu ignorieren.

¹2-dimensionale Polytope heißen für gewöhnlich auch *Polygone*.