

Blatt 12

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 21.01., 16:00.
 Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
 Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – Wahr oder falsch?

[10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r - f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	Wahr	Falsch
1. Ist $A \in \mathcal{L}(3)$, so auch $-A$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Sind $A, B \in \mathcal{L}(3)$, so auch $A + B$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Ist $A \in \mathcal{L}(3)$, so auch A^T .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Sei $x \in \mathbb{R}^3$, dann ist das <i>Lorentz-orthogonale Komplement</i> definiert als $x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, y \rangle\rangle = 0\}$. Es ist x^\perp ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Sind $x, y \in \mathbb{R}^3$ Lorentz-orthogonal, so sind sie auch orthogonal bzgl. dem Standardskalarprodukt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Eine Lorentz-Orthonormalbasis kann keine lichtartigen Vektoren enthalten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Das folgende ist eine Lorentz-Transformation:	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 8. Die folgenden Lorentz-Transformationen sind invers zueinander: | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|---|--------------------------|--------------------------|

$$\begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \cosh(-\eta) & \sinh(-\eta) & 0 \\ \sinh(-\eta) & \cosh(-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 9. Jedes $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ hat Determinante $+1$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10. Sind zwei lichtartige Vektoren Lorentz-orthogonal, so sind sie bereits Vielfache von einander. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2 – Hyperbeln

[10 Punkte]

- (i) Sei H eine Hyperbel mit Brennpunkten A und B . Zeigen Sie, dass H achsensymmetrisch zu $G(A, B)$ ist und Punktsymmetrisch zu $\frac{1}{2}(A + B)$.

Gegeben sei die Hyperbel H mit Gleichung

$$4x^2 - 32x - y^2 - 4y + 24 = 0.$$

- (ii) Bestimmen Sie die Brennpunkte, den Parameter ρ aus der Definition über Brennpunkte, und den Mittelpunkt von H . Skizzieren Sie H .

Aufgabe 3 – Lorentz Orthonormalbasen

[10 Punkte]

Sei $v = (2, 1, 1)^T$.

- (i) Zeigen Sie, dass v zeitartig ist.
- (ii) Finden Sie eine Lorentz-orthonormale Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von \mathbb{R}^3 sodass b_1 ein Vielfaches von v ist.
- (iii) Sind b_2 und b_3 zeitartig, lichtartig, oder raumartig?

Aufgabe 4 – Hyperbolische Isometrien

[10 Punkte]

Zeigen Sie, dass jede hyperbolische Isometrie eine zeitorientierungserhaltende Lorentz-Transformation ist, vgl. Bemerkung 4.2.11 im Skript.

Hinweis: Überlegen Sie sich anhand geeignet gewählter Punkte in der hyperbolischen Ebene, auf welche Vektoren e_1 , e_2 und e_3 von der Lorentztransformation abgebildet werden müssen.