Blatt 2

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 29.10, 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1. Gegeben zwei mal drei Punkte A, B, C und A', B', C', jeweils paarweise verschieden, dann gibt es eine euklidische Bewegung f mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, und $f(C) = C'$.	☐	☐
2. Folgende Abbildung ist eine euklidische Bewegung: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y+1 \\ x+y-1 \end{pmatrix}.$$	☐	☐
3. Folgende Abbildung ist eine euklidische Bewegung: $$p \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$	☐	☐
4. Jede orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist eine Drehung.	☐	☐
5. Seien $r, s, t \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck mit Seitenlängen r, s, und t.	☐	☐
6. Bis auf Kongruenz gibt es genau ein gleichseitiges Dreieck.	☐	☐
7. Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein euklidisches Dreieck. Dann kann $\mathbb{R}^2$ lückenlos mit Kopien von Δ (durch euklidische Bewegungen verschoben) ausgefüllt werden.	☐	☐
8. Zwei Seitenlängen und ein Winkel definieren ein bis auf Kongruenz eindeutiges Dreieck.	☐	☐
9. Der Höhenschnittpunkt liegt immer im Inneren des Dreiecks.	☐	☐
10. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge von Punkten. Dann ist $\{f \in E(2) \mid \forall p \in P : f(p) = p\}$ eine Untergruppe von $E(2)$.	☐	☐

Aufgabe 2 – *Euklidische Bewegungen* [12 Punkte]

Betrachten Sie die Spiegelung an der x-Achse s, Verschiebung t_p um p, und die Rotation

r_θ um den Ursprung um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn:

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ t_p : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \longmapsto v + p \\ r_\theta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

(i) Vergewissern Sie sich, dass s, t_p, und r_θ Euklidische Bewegungen sind. (Keine Abgabe).

(ii) Stellen Sie die Spiegelung an einer allgemeinen Geraden $L = \{vt + a \mid t \in \mathbb{R}\}$ in der Form $F_{A,b}(v) = Av + b$ dar.

(iii) Stellen Sie die Punktspiegelung an einem allgemeinen Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ in der Form $F_{A,b}(v) = Av + b$ dar.

(iv) Stellen Sie die Rotation um einen Punkt q um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn in der Form $F_{A,b}(v) = Av + b$ dar.

(v) Zeigen Sie, dass jede euklidische Bewegung entweder von der Form $t_p \circ r_\theta \circ s$ oder $t_p \circ r_\theta$ ist für eindeutige p und θ. Zeigen Sie, dass s in der Darstellung benötigt wird genau dann wenn $\det A = -1$.

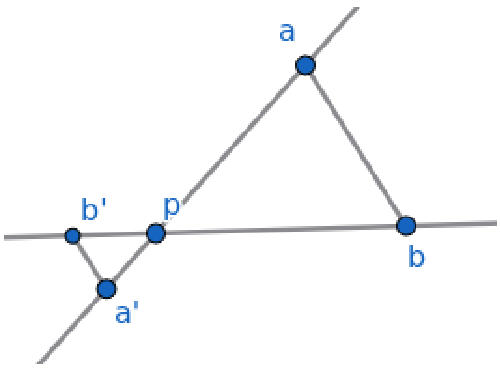
Aufgabe 3 – *Seitenhalbierende* [8 Punkte]

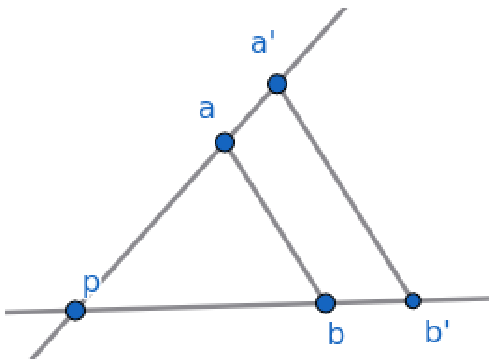
Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein euklidisches Dreieck. Seit s der Umfang von Δ und m die Summe der Längen der drei Seitenhalbierenden von Δ. Beweisen Sie, dass

$$\frac{3}{2}s > m > \frac{3}{4}s.$$

Hinweis: man erinnere sich an die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 4 – *Strahlensätze* [7 Punkte]





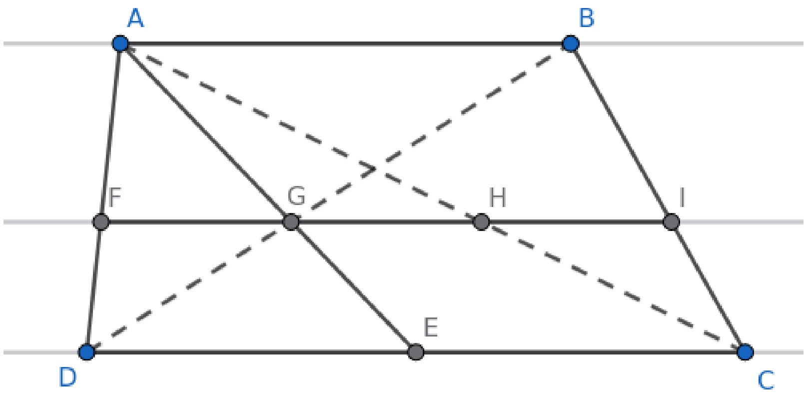
Betrachte zwei Geraden G, H mit $G \cap H = \{p\}$. Seien $a, a' \in G \setminus \{p\}$ verschieden und $b, b' \in H \setminus \{p\}$ verschieden. Beweisen Sie, dass $G(a,b) || G(a',b')$ genau dann wenn eine (und damit beide) der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\frac{||p-a||}{||a-a'||} = \frac{||p-b||}{||b-b'||}$ und $\frac{||p-a'||}{||a-a'||} = \frac{||p-b'||}{||b-b'||}$ und p liegt zwischen a und a' genau dann wenn p zwischen b und b' liegt.

(ii) $\frac{||a-b||}{||a'-b'||} = \frac{||p-a||}{||p-a'||} = \frac{||p-b||}{||p-b'||}$ und p liegt zwischen a und a' genau dann wenn p zwischen b und b' liegt.

Aufgabe 5 – *Drittelung im Trapez* **[5 Punkte]**

Betrachten Sie folgende Konstruktion: Gegeben sind parallele Geraden $G(A,B)$ und $G(C,D)$ und wir betrachten das Trapez (A,B,C,D). Man zeichne die Diagonalen $G(A,C)$ und $G(B,D)$ ein (im Bild gestrichelt). Nun sei E der Mittelpunkt zwischen C und D. Sei G der Schnittpunkt von $G(B,D)$ und $G(A,E)$. Endlich betrachten wir die Gerade durch G, welche parallel zu den Grundseiten des Trapezes verläuft und benennen die weiteren Schnittpunkte mit den Trapezseiten und den -diagonalen F, H, und I wie in der Skizze.



Beweisen Sie, dass $||G-F|| = ||H-G|| = ||I-H||$.