Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 3

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 29.10, 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1. Seien $K_r(m)$ und $K_{r'}(m')$ zwei Kreise. Wenn $\|\|m-m'\|\| < r+r'$ dann schneiden sich die Kreise.	☐	☐
2. Zwei Kreise, welche nicht gleich sind, können sich in 0,1, oder 2 Punkten schneiden.	☐	☐
3. Gegeben sei ein Kreis $K_r(m)$ und ein Punkt $p \in K_r(m)$. Dann gibt es genau eine Tangente an $K_r(m)$ in p.	☐	☐
4. Sei $K_r(m)$ ein Kreis und $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K_r(m)$. Dann gibt es mindestens eine Tangente an $K_r(m)$, welche durch p verläuft.	☐	☐
5. Gegeben sei ein Kreis $K_r(m)$, ein Punkt $p \in K_r(m)$, und $s > 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es genau einen Kreis $K_s(m')$ sodass $K_s(m') \cap K_r(m) = \{p\}$.	☐	☐
6. Gegeben seien drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann gibt es genau einen Kreis durch A, B, und C.	☐	☐
7. Gegeben seien drei Geraden $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden und paarweise nicht parallel. Dann gibt es genau einen Kreis, welcher L_1, L_2, und L_3 tangiert.	☐	☐
8. Der Umkreispunkt liegt immer im Inneren des Dreiecks.	☐	☐
9. Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt immer innerhalb des Inkreises.	☐	☐
10. Seien A, B, C, D vier paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis $K_r(m)$. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten des Vierecks (A, B, C, D) in einem Punkt.	☐	☐

Aufgabe 2 – *Teilverhältnisse und Satz von Ceva* [11 Punkte]

In dieser Aufgabe wollen wir ein paar Rechenregeln für Teilverhältnisse überprüfen und damit die Lücken im Beweis des Satzes von Menelaos aus der Vorlesung schließen. Außerdem wollen wir mit dem Satz von Ceva eine Anwendung des Satzes von Menelaos kennenlernen. Allgemein definiert man: sind $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ linear abhängige Vektoren, dann ist das *Teilverhältnis* $\frac{v}{w}$ die eindeutige reelle Zahl λ sodass $\lambda w = v$.
Seien A, B, C kollineare und paarweise verschiedene Punkte.

(i) $\frac{A-B}{B-C} = -\frac{B-A}{B-C} = -\frac{A-B}{C-B}$

(ii) (Formales Kürzen) Sei D ein weiterer Punkt auf $G(A,B) \setminus \{A,B,C\}$. Dann gilt

$$\frac{A-B}{B-C}\frac{B-C}{C-D} = \frac{A-B}{C-D}.$$

(iii) (Invarianz unter euklidischen Bewegungen) Sei $f \in E(2)$ eine euklidische Bewegung. Dann ist

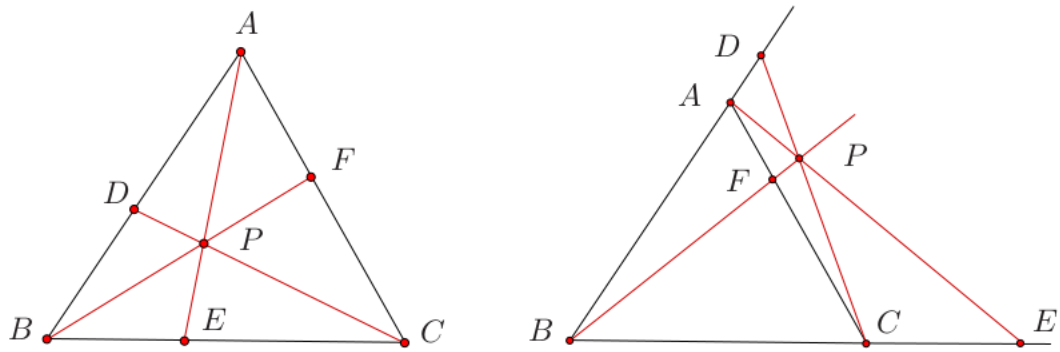
$$\frac{A-B}{B-C} = \frac{f(A)-f(B)}{f(B)-f(C)}.$$

(iv) (Satz von Ceva) Sei $\Delta = (A,B,C)$ ein euklidisches Dreieck und P ein Punkt welcher auf der keiner der (verlängerten) Dreiecksseiten liegt. Benenne die Schnittpunkte

$$G(A,B) \cap G(C,P) = \{D\}, \quad G(B,C) \cap G(A,P) = \{E\}, \quad G(A,C) \cap G(B,P) = \{F\}.$$

Dann gilt

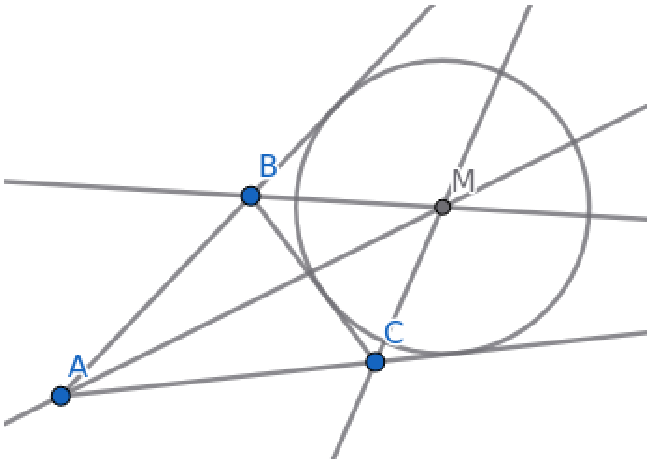
$$\frac{A-D}{D-B}\frac{B-E}{E-C}\frac{C-F}{F-A} = 1. \tag{1}$$



Anmerkung: Im Satz von Ceva gilt auch die umgekehrte Aussage. Das soll hier aber unbewiesen bleiben.

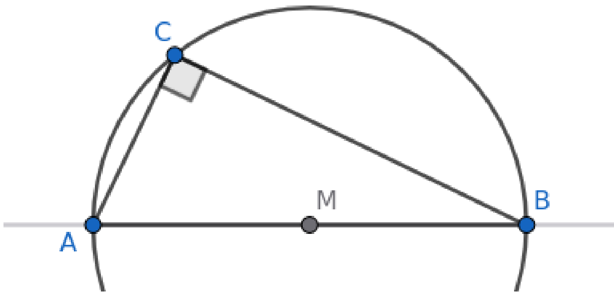
Aufgabe 3 – *Ankreissatz* [8 Punkte]

Beweisen Sie den folgenden Satz.
Sei $\Delta = (A,B,C)$ ein euklidisches Dreieck. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A und die Winkelhalbierenden der Außenwinkel an B und C schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt M. Dieser Punkt is der Mittelpunkt eines Kreises (der sogenannte *Ankreis*), welcher $\overline{BC}$, $G(A,B)$, und $G(A,C)$ berührt.



Aufgabe 4 – *Satz des Thales* **[10 Punkte]**

(i) Beweisen Sie den Satz des Thales: Sei $K_r(M)$ ein Kreis und seien $A, B \in K_r(M)$ verschiedene Punkte sodass A, B, und M kollinear sind. Dann gilt für jeden Punkt $C \in K_r(M) \setminus \{A, B\}$ dass $\sphericalangle(A, C, B) = \pi/2$.



(ii) Gegeben sei eine Gerade G und ein Punkt $P \in G$. Finden Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, welche eine Senkrechte zu G durch P in nur drei Schritten errichtet. Dabei ist ein Schritt das Zeichnen einer Gerade oder eines Kreises, dagegen ist Punkte markieren eine freie Aktion und kein Extraschritt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. (Optimale Lösung für Euclidea, Level β.6)

(iii) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal eine Tangente an einen Kreis durch einen Punkt P, welcher außerhalb des Kreises liegt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. (Euclidea, Level κ.1)