

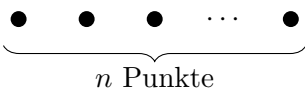
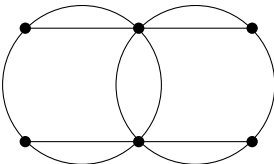
Blatt 5

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 29.10, 16:00.
 Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
 Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – Wahr oder falsch?

[10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r - f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	Wahr	Falsch
1. Gegeben sei eine endliche Inzidenzgeometrie mit n Punkten. Wenn $n \geq 4$, dann gibt es eine Gerade, welche zu mindestens 3 Punkten inzident ist.	☐	☐
2. Die Inzidenzgeometrie beschrieben durch folgendes Diagramm ist realisierbar in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 3$:	☐	☐
		
3. In einer Inzidenzgeometrie muss jede Gerade zu mindestens zwei Punkten inzident sein.	☐	☐
4. Zwei Inzidenzgeometrien mit jeweils genau drei Punkten sind bereits isomorph.	☐	☐
5. Folgendes Diagramm definiert eine Inzidenzgeometrie:	☐	☐
		
6. Sei $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der euklidische Abstand und sei $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Abstand, welcher von der sup-Norm induziert ist. Dann sind $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ isometrisch isomorph.	☐	☐
7. Jede Metrik auf einem Vektorraum ist von einer Norm erzeugt.	☐	☐
8. Sei V ein Vektorraum mit Metrik d . Seien $a, b \in V$ mit $d(0, a) \neq 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $d(0, na) > d(0, b)$.	☐	☐
9. Seien $f \in E(n)$. Wenn f zwei Fixpunkte $A \neq B$ besitzt, dann fixiert f bereits $G(A, B)$.	☐	☐
10. Jede euklidische Bewegung im $\mathbb{R}^2$ kann durch Verkettung von Spiegelungen an geeigneten Geraden dargestellt werden.	☐	☐

Aufgabe 2 – Inzidenzgeometrie

[10 Punkte]

Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen.

- (i) Zeichnen Sie das Diagramm, welches die Inzidenzgeometrie der Ebene über $\mathbb{F}_3$ darstellt.
- (ii) Wie ist in dieser Geometrie die Situation mit Existenz und Eindeutigkeit von Parallelen?
- (iii) Erweitern Sie die Geometrie aus Teil (i) durch Hinzufügen von 4 Punkten und verlängern bzw. hinzufügen von Geraden so, dass es keine parallelen Geraden mehr gibt.
- (iv) Argumentieren Sie, dass das Ergebnis von Teil (iii) nicht durch weniger als 4 neue Punkte erreicht werden kann.
- (v) Ohne Beweis: Gelten in den Geometrien aus Teil (i) und (iii) jeweils die Sätze von Desargues, Pappus, und Pascal?

Aufgabe 3 – Kein Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^4$

[6 Punkte]

Eine Abbildung

$$\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt *Kreuzprodukt*, falls gilt

- (i) $\times$ ist bilinear,
- (ii) $\langle x, x \times y \rangle = \langle y, x \times y \rangle = 0$ für all $x, y \in \mathbb{R}^n$, und
- (iii) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Offenbar ist das bekannte Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ein Beispiel hierfür. Beweisen Sie, dass es kein Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^4$ gibt.

Anmerkung: Tatsächlich ist das Kreuzprodukt ein echtes Kuriosum. Ein Kreuzprodukt im Sinne dieser Aufgabe gibt es genau im $\mathbb{R}^3$ und im $\mathbb{R}^7$ und sonst keiner anderen Dimension.

Aufgabe 4 – Hamming-Abstand

[10 Punkte]

Es seien $x, y \in \{0, 1\}^n$ zwei Binärcodes bestehend aus n Bits. Der *Hamming-Abstand* ist die Anzahl der Positionen an denen sich die Codes unterscheiden, also

$$d_H(x, y) = |\{1 \leq i \leq n \mid x_i \neq y_i\}|.$$

- (i) Zeigen Sie, dass der Hamming-Abstand eine Metrik auf $\{0, 1\}^n$ definiert.
- (ii) Sei $x \in \{0, 1\}^n$ ein Code und $r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Bestimmen Sie die Kardinalität der Abstandssphäre mit Radius r um x , also

$$|\{y \in \{0, 1\}^n \mid d_H(x, y) = r\}|.$$

Sei $\mathcal{C} \subseteq \{0, 1\}^n$ eine Menge von Codes der Länge n . Der minimale Abstand zwischen zwei Codes in der Menge ist

$$d_{\mathcal{C}} = \min_{\substack{x, y \in \mathcal{C}, \\ x \neq y}} d_H(x, y).$$

- (iii) Beweisen Sie die Singleton-Schranke: wenn $d_{\mathcal{C}} \geq k$, dann ist $|\mathcal{C}| \leq 2^{n-k+1}$.