

Blatt 6

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 26.11., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – Wahr oder falsch? [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r - f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Falls nicht anders angegeben sei (X, d) ein metrischer Raum und $\Delta \subseteq X$.

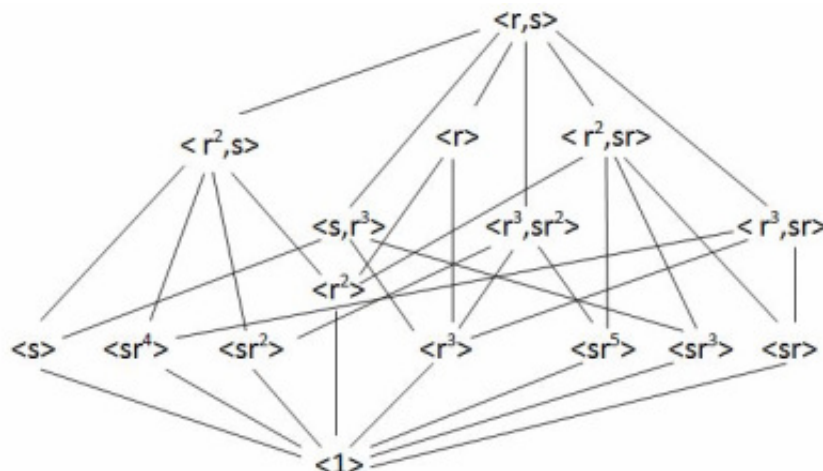
Aussage	Wahr	Falsch
1. Würfel und Oktaeder haben die gleiche Symmetriegruppe.	☐	☐
2. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Wenn für $f \in \text{Aff}(n)$ gilt $f(\Delta) = \Delta$, dann ist schon $f \in \text{Sym}(\Delta) \leq E(n)$.	☐	☐
3. Enthält $\text{Sym}(\Delta)$ ein Element mit unendlicher Ordnung, so ist Δ unbeschränkt.	☐	☐
4. Alle Untergruppen von $\text{Sym}(\Delta)$ sind als Symmetriegruppen von geeigneten Färbungen von Δ realisierbar.	☐	☐
5. Die Gruppen C_n können als Symmetriegruppe einer ungefärbten Figur geschrieben werden.	☐	☐
6. Sei $f \in \text{Iso}(X, d)$ so, dass $f _{\Delta}$ die Identität auf Δ ist. Dann ist f die Identität auf X .	☐	☐
7. $D_{2n} \cong C_n \times C_2$	☐	☐
8. Wenn $\Delta' \subseteq \Delta$ dann ist $\text{Sym}(\Delta') \leq \text{Sym}(\Delta)$.	☐	☐
9. In $X = \mathbb{R}^n$: wenn Δ und Δ' ähnlich sind, dann ist $\text{Sym}(\Delta) \cong \text{Sym}(\Delta')$.	☐	☐
10. In $X = \mathbb{R}^n$: wenn $\text{Sym}(\Delta) \cong \text{Sym}(\Delta')$ dann sind Δ und Δ' ähnlich.	☐	☐

Aufgabe 2 – Diedergruppe [10 Punkte]

Für $n \geq 3$ ist die Diedergruppe D_{2n} die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks. Als Gruppe ist sie erzeugt von einem Element r der Ordnung n („Drehung um $2\pi/n$ “) und einem Element s der Ordnung 2 („Spiegelung“).

- Schreiben Sie $D_{2,5}$ als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_5 . Geben Sie eine Wahl von r und s in S_5 an, welche $D_{2,5}$ erzeugen.
- Zeigen Sie, dass $C_n = \langle r \rangle \trianglelefteq D_{2n}$ ein Normalteiler ist.
- Zeigen Sie, dass D_{2n} nicht abelsch ist für $n \geq 3$. Geben Sie eine Untergruppe von D_{2n} an, welche kein Normalteiler ist.

- (iv) Unten finden Sie das Diagramm aller Untergruppen der $D_{2,6} = \langle r, s \rangle$. Welche davon sind konjugiert? Begründen Sie Ihre Aussage.



Aufgabe 3 – Symmetrie des Würfels

[9 Punkte]

Sei $W = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Würfel. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\text{Sym}(W) \cong S_4 \times C_2$. Beschreiben Sie für jede der folgenden Gruppen H eine Färbung g des Würfels, sodass $\text{Sym}(g) \cong H$.

(i) $H = S_4$

(ii) $H = K_4$

(iii) $H = C_4$

Aufgabe 4 – Ornamentgruppen

[10 Punkte]

Betrachten Sie die folgenden Muster. Sei jeweils G die Symmetriegruppe des Musters – es handelt sich in jedem Fall um eine Ornamentgruppe.

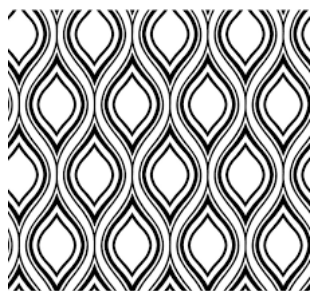


Bild 1

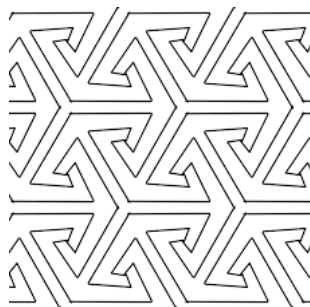


Bild 2

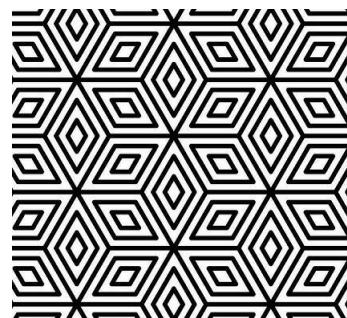


Bild 3

- (i) Zeichnen Sie in jedes Muster das Gitter G_T ein und kennzeichnen Sie eine primitive Zelle. Geben Sie weiter für jedes Muster den Gittertyp und die Punktgruppe G_0 an. Sind die Symmetriegruppen von Bild 2 und 3 isomorph?
- (ii) Entwickeln Sie drei Muster, welches jeweils auf einem quadratischen Gitter basiert, aber welche drei verschiedene Punktgruppen haben. Geben Sie jeweils die Punktgruppe an.