Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 7

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 03.12., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

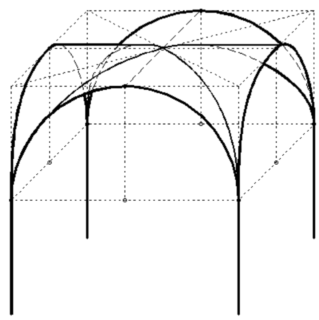
Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1. $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$ für alle $m \geq 0$.	☐	☐
2. Zwei Mengen A und B mit $\mathcal{H}^0(A) = \mathcal{H}^0(B)$ sind bereits gleich mächtig.	☐	☐
3. Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, dann ist $\mathcal{H}^n(A) < \infty$.	☐	☐
4. Seien $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele Teilmengen eines metrischen Raumes X. Dann ist $\mathcal{H}^m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(A_i)$.	☐	☐
5. Die Folge der Normalisierungsfaktoren im Hausdorff-Maß $(\alpha_m)_m$ ist eine Nullfolge.	☐	☐
6. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $\mathcal{H}^1(\operatorname{Graph} f) = b-a$.	☐	☐
7. Sei $f(x) = Ax + b$ eine affine Transformation aus $\operatorname{Aff}(n)$ mit $\det(A) = 1$. Dann ist $\mathcal{H}^m(f(M)) = \mathcal{H}^m(M)$ für alle $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \geq 0$.	☐	☐
8. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{H}^2(f(A)) = \mathcal{H}^2(A)$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist schon eine euklidische Bewegung.	☐	☐
9. Gegeben ein Parallelogramm $P \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Kantenlängen a und b. Der Flächeninhalt von P ist $\mathcal{H}^2(P) = ab$.	☐	☐
10. Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ unbeschränkt ist, dann ist $\mathcal{H}^n(A) = \infty$.	☐	☐

Aufgabe 2 – *Volumenberechnung* [12 Punkte]

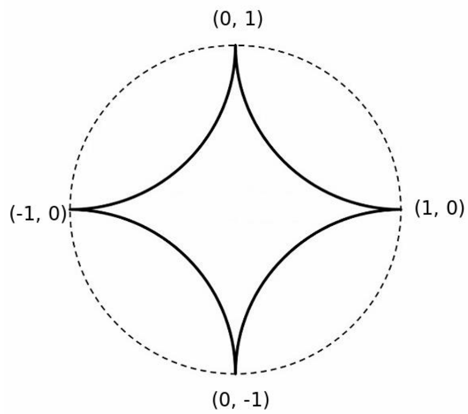
Berechnen Sie:

(i) $\mathcal{H}^3$ des Volumen unter dem Kreuzgewölbe:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x, y \in [-1,1],\ z \in [0,1]\ \text{, und} \\ x^2 + z^2 \leq 1 \text{ oder } y^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$



(ii) $\mathcal{H}^2$ eines Sterns mit 4 Spitzen, welcher von vier Viertelkreisen berandet ist:



(iii) $\mathcal{H}^3$ eines regelmäßigen Tetraeders:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{4} t_i e_i \;\middle|\; t_i \in [0,1] \text{ für alle } i = 1, \dots, 4, \text{ und } \sum_{i=1}^{4} t_i = 1 \right\}$$

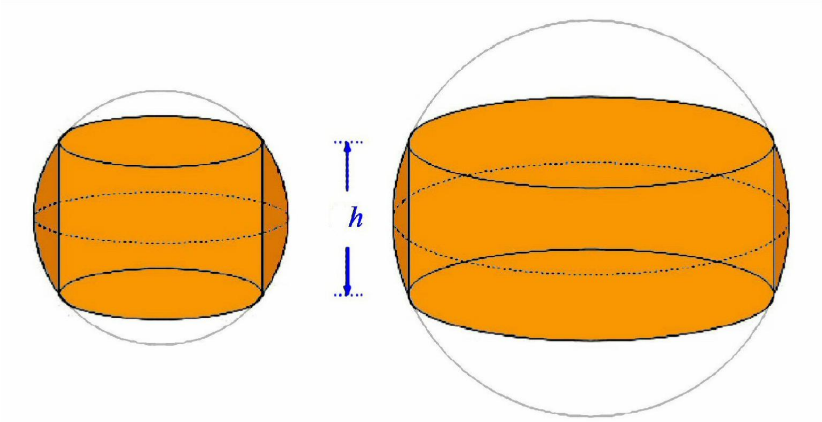
Achten Sie bei allen Aufgabenteilen auf eine saubere Argumentation mit den Sätzen der Vorlesung. Prüfen Sie jeweils sorgfältig die Voraussetzungen der Sätze. Sie dürfen Lemma 2.4.24 aus dem Skript verwenden:

Lemma 2.4.24 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene. Mit K_1 und K_2 seien die Teile von K auf der einen oder anderen Seite von H (jeweils inklusive $K \cap H$) bezeichnet.
Dann gilt $\mathcal{H}^n(K) = \mathcal{H}^n(K_1) + \mathcal{H}^n(K_2)$.

Aufgabe 3 – *Serviettenring-Paradox* [8 Punkte]

Wir betrachten einen *Serviettenring*, der wie folgt konstruiert wird. Man beginnt mit einer dreidimensionalen Kugel mit Radius R. Dann durchbohrt man die Kugel vertikal mit einem zylinderförmigen Loch mit Radius r. Übrig bleibt der Serviettenring $S_{r,R}$.

Berechnen Sie $\mathcal{H}^3(S_{r,R})$ und zeigen Sie, dass das Volumen nur von der Höhe h des Serviettenrings abhängt.



Hinweis: Ggf. müssen Sie mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Proposition 3.15 (= Beispiel 2.4.20 im Skript) arbeiten! Insbesondere hilft Lemma 2.4.24 von oben hier nicht weiter.

Aufgabe 4 – *Additivität des Hausdorff-Maß* [10 Punkte]

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ kompakt und paarweise disjunkt. Zeigen Sie, dass dann für alle $m \geq 0$

$$\mathcal{H}^m\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^m(A_i).$$