Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

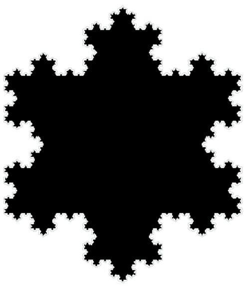
Blatt 8

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 10.12., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **2 Aufgaben korrigiert**.

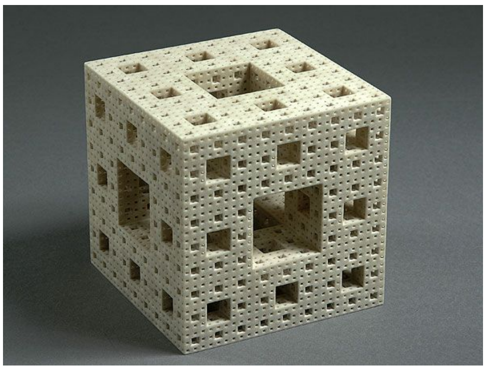
Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	Die Hausdorff-Dimension der leeren Menge ist 0.	☐	☐
2.	Die ausgefüllte Koch-Schneeflocke ist ein Fraktal im Sinne der Definition aus der Vorlesung.	☐	☐
3.	Der Menger-Schwamm ist ein Fraktal im Sinne der Definition aus der Vorlesung.	☐	☐
4.	Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der trivialen Metrik $d(x,y) = 1$ wenn $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$. Dann ist $\dim_{\mathcal{H}}[0,1]^2 = 2$.	☐	☐
5.	Die Hausdorff-Dimension einer offenen Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist n.	☐	☐
6.	Fraktale (im Sinne der Vorlesung) haben immer irrationale Dimension.	☐	☐
7.	Sphärische Geometrie mit Großkreisen in der Rolle von Geraden ist eine Inzidenzgeometrie im Sinne der axiomatischen Geometrie.	☐	☐
8.	Wenn sich drei Großkreise in einem Punkt schneiden, dann schneiden sie sich in mindestens zwei Punkten.	☐	☐
9.	Jede Ähnlichkeitstransformation von S^2 ist bereits eine Isometrie.	☐	☐
10.	Sei K der Großkreis definiert durch den Punkt $p \in S^2$ und den Tangentialvektor X mit $\|\|X\|\| = 1$. Dann ist K gleichzeitig der Großkreis definiert durch X aufgefasst als Punkt von S^2 und p aufgefasst als Tangentialvektor an X.	☐	☐



Ausgefüllte
Koch-Schneeflocke



Menger-Schwamm

Aufgabe 2 – *λ-Cantormenge* **[10 Punkte]**

Sei $\lambda \in (0,1)$. Die *λ-Cantormenge* C_λ wird wie folgt gebildet. Man beginnt mit dem Einheitsintervall $[0,1]$. In jedem Schritt wird aus jedem verbleibenden Intervall I mit Länge x das offene Intervall welches das mittlere Stück der Länge λx bildet, entfernt. Die Cantormenge aus der Vorlesung ist der Spezialfall mit $\lambda = 1/3$.

(i) Sei $d_\lambda = \frac{\log 2}{\log(2/(1-\lambda))}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^{d_\lambda}(C_\lambda) < \infty$ und damit $\dim_{\mathcal{H}}(C_\lambda) \leq d_\lambda$.

Tatsächlich ist auch $\mathcal{H}^{d_\lambda}(C_\lambda) > 0$ und das dürfen Sie ab jetzt ohne Beweis annehmen.

(ii) Folgern Sie, dass jeder Wert aus $[0,1]$ als Hausdorff-Dimension einer geeigneten Teilmenge von $\mathbb{R}$ auftritt.

(iii) Konstruieren Sie eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit Hausdorff-Dimension 1 aber eindimensionalem Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^1(A) = 0$. **Hinweis:** Monotonie ($A \subseteq B \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$) und Subadditivität ($\mathcal{H}^m(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^m(A_i)$) könnten hilfreich sein.

Aufgabe 3 – *Darstellungen von Großkreisen* **[15 Punkte]**

In der Vorlesung haben wir die *Parameterdarstellung* für Großkreise kennengelernt: gegeben $p \in S^2$ und X ein Tangentialvektor mit $||X|| = 1$ dann

$$K = \{\cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Eine Alternative bildet die Darstellung durch eine Gleichung mit Parametern $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sodass nicht alle a_i gleichzeitig 0 sind:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}.$$

(i) Beweisen Sie: Drei Punkte $p_1, p_2, p_3 \in S^2$ liegen auf einem gemeinsamen Großkreis genau dann wenn $\det(p_1, p_2, p_3) = 0$.

(ii) Gegeben sei der Großkreis K definiert durch den Punkt $p = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$ und den Tangentialvektor $X = (1,1,-1)$. Finden Sie eine Beschreibung für K durch eine Gleichung wie oben.

(iii) Gegeben zwei Punkte $p_1 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Warum gibt es einen eindeutigen Großkreis durch p_1 und p_2? Beschreiben Sie den Großkreis in Parameter- und Gleichungsdarstellung.

(iv) Beweisen Sie: Zwei Großkreise in Gleichungsdarstellung mit Parametern a_1, a_2, a_3 (nicht alle gleich 0) und b_1, b_2, b_3 (nicht alle gleich 0) stimmen überein genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $b_i = \lambda a_i$ für alle $i = 1, 2, 3$.

(v) Beweisen Sie: Gegeben n Großkreise $K^{(i)}$ dargestellt über Gleichungen mit Parametern $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$ (nicht alle gleich 0) für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass sich die $K^{(i)}$ in einem gemeinsamen Punkt schneiden genau dann wenn

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ & \vdots & \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} \end{pmatrix} \leq 2.$$