UNIVERSITÄT TÜBINGEN
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 9

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload of URM. Abgabetermin: 17.12., 16:00.
Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder.
Von diesem Blatt werden **3 Aufgaben korrigiert**.

Aufgabe 1 – *Wahr oder falsch?* [10 Punkte]

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen. Hinweis zur Bewertung: Sie erhalten $\max\{0, r-f\}$ Punkte, wobei r die Anzahl richtiger Antworten und f die Anzahl falscher Antworten ist.

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
1. Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$ eingeschränkt auf S^2 definiert eine Metrik auf S^2.	☐	☐
2. Gegeben sei V ein 4-Eck auf S^2, sodass alle Seiten gleich lang sind. Ist einer der Winkel von V ein rechter, so sind alle vier Winkel von V rechte Winkel.	☐	☐
3. Steuert man mit dem Flugzeug einen konstanten Kompasskurs, so fliegt man einen Großkreis um die Erde.	☐	☐
4. Ein sphärisches Dreieck (A, B, C) heißt *autopolar* wenn es gleich seinem polaren ist. Jedes autopolare Dreieck ist gleichseitig.	☐	☐
5. Jedes gleichseitige Dreieck ist autopolar.	☐	☐
6. Für $n \geq 1$ seien $K_1, \ldots, K_n$ Großkreise, wovon keine drei einen gemeinsamen Punkt haben. Dann unterteilen die K_i die Sphäre in 2^n Gebiete.	☐	☐
7. Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq S^2$, sodass $\mathrm{Sym}(A)$ die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Tetraeders ist.	☐	☐
8. Wenn man in der Definition eines sphärischen Dreiecks auch lange Großkreisbögen als Seiten zulassen würde, dann könnte man Dreiecke mit beliebigem Umfang $\in (0, 6\pi)$ finden.	☐	☐
9. Jede Isometrie $f \neq \mathrm{id}$ von S^2 hat genau zwei Fixpunkte.	☐	☐
10. Für jedes Paar von Punkten $x, x' \in S^2$ gibt es ein $R \in SO(3)$ mit $Ax = x'$.	☐	☐

Aufgabe 2 – *Flugrouten* [12 Punkte]

Sie fliegen von Hongkong (22,3° N, 114,2° E) nach Valparaiso (33,0°S, 71,7° W). Berechnen Sie:

(i) Die Entfernung der beiden Städte in Luftlinie (anzugeben wahlweise in Seemeilen [1 sm = 1' = 1°/60 = 1,852 km] oder Kilometer).

(ii) Beide Kurswinkel, d.h. die orientierten Winkel zwischen Norden = 0° und 360°, im Uhrzeigersinn zählend, die der Pilot bei Abflug und Landung jeweils steuern muss.

(iii) Den südlichsten Punkt der Flugroute (mit Breiten- und Längengrad).

(iv) Den Schnittpunkt mit dem Äquator (bei $\varphi = 0$).

(v) Den Schnittpunkt mit der Datumsgrenze (bei $\lambda = \pi$).

Anmerkung: Diese Aufgabe ist einem Schulbuch für die 12. Klasse der 1950er Jahre entnommen.

Aufgabe 3 – *Kongruenzsätze für sphärische Dreiecke* **[10 Punkte]**

Seien $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ zwei sphärische Dreiecke. Zeigen Sie, dass Δ und Δ' kongruent sind genau dann wenn nach eventueller Umbenennung der Ecken eine (und damit alle) der folgenden Aussagen gelten:

(i) (sws) $a = a'$, $b = b'$, und $\gamma = \gamma'$.

(ii) (ssw) $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$, und β und β' sind entweder beide spitz oder beide stumpf.

(iii) (wsw) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, und $c = c'$.

Bonusaufgabe: Finden Sie außerdem ein Beispiel, welches zeigt, dass die Zusatzbedingung über β und β' bei (ssw) notwendig ist.

Anmerkung: Es gelten außerdem noch die Kongruenzsätze (sss), (www), und (wws). Hiervon ist vermutlich (www) die beeindruckendste Eigenschaft der sphärischen Geometrie.

Aufgabe 4 – *Achsendrehung* **[8 Punkte]**

Sei $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Gerade

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Finden Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(R)$ von R, bezüglich der Standardbasis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$.