Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
F. Röhrle, C. Nollau

Geometrie
WS 2025/26

Probeklausur

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________

Hinweise:

- Versehen Sie alle Blätter mit Name und Matrikelnummer. Sie dürfen Vorder- und Rückseite beschreiben und bei Bedarf weiter Blätter nutzen.
- Sofern nicht anders angegeben müssen Sie alle Ihre Antworten immer begründen.
- Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind:
  - Ein beidseitig, handschriftlich beschriebendes DIN-A4 Blatt („Spickzettel“)
  - Zirkel und Lineal / Geodreieck
  - nicht-programmierbarer und nicht programmierter Taschenrechner
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Punkte:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

Note: ______________________________

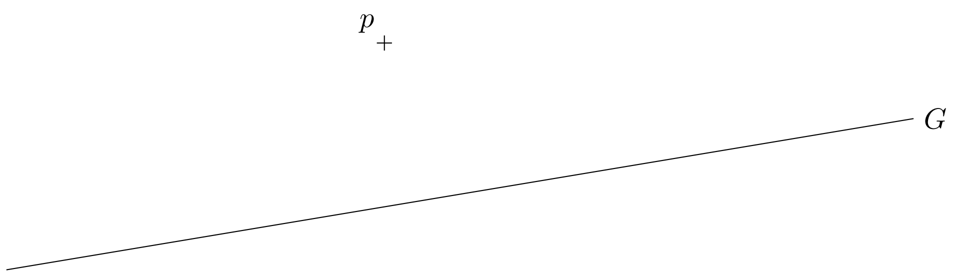
Geometrie WS 2025/26 — Probeklausur

Name: Matrikelnummer:

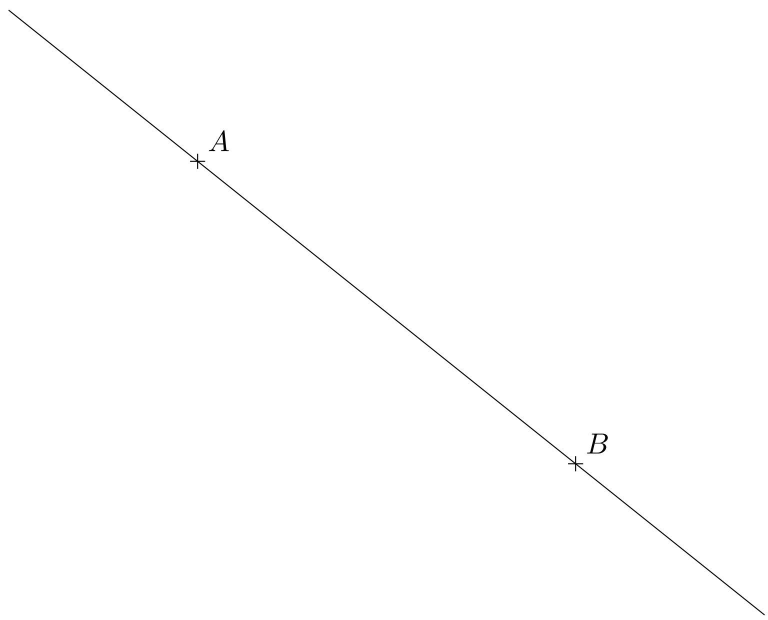
Aufgabe 1.
- **In jeder Teilaufgabe ist die Korrektheit der Konstruktion zu beweisen!**
- **Falls der Platz nicht reicht, führen Sie Ihre Konstruktion in einer vergleichbaren Zeichnung auf einem separaten Blatt durch.**
- **Konstruktionen, die in Vorlesung oder Übungen behandelt wurden, dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.**

Gegeben sei eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) Sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus G$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Parallele zu G durch p (Euclidea, Level $\varepsilon.1$).



(ii) Seien $A, B \in G$. Konstruieren Sie einen Punkt $C \in G$, sodass $||A - C|| = \frac{||A-B||}{5}$ (Euclidea, Level $\lambda.10$).



Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 2. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1\}$:

$$p \sim q \text{ genau dann wenn } p = \pm q.$$

Damit seien

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= S^2/\sim \\
\mathcal{G} &= \{\overline{G} = G/\sim \mid G \text{ ist Großkreis in } S^2\} \\
\mathcal{I} &= \{(\overline{p}, \overline{G}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \mid \overline{p} \in \overline{G}\}.
\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^2 = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein Modell einer Inzidenzgeometrie ist. Gilt in dieser Geometrie das Parallelenaxiom?

(ii) Wir definieren ein zweites Modell $(\mathbb{P}^2)^\vee = (\mathcal{P}^\vee, \mathcal{G}^\vee, \mathcal{I}^\vee)$ mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\vee &= \mathcal{G} \\
\mathcal{G}^\vee &= \mathcal{P} \\
\mathcal{I}^\vee &= \{(\overline{G}, \overline{p}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{P} \mid \overline{G} \ni \overline{p}\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}^2)^\vee$ isomorph zu $\mathbb{P}^2$ ist. Folgern Sie, dass auch $(\mathbb{P}^2)^\vee$ eine Inzidenzgeometrie ist.

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 3. Diese Aufgabe ist numerisch zu lösen. Ergebnisse sind in Kilometer anzugeben. Der Radius der Erde beträgt $R = 6.370$ km.

Sie fliegen von Frankfurt ($F = 50,1°N,\ 8,7°E$) nach Tahiti ($T = 17,7°S,\ 149,4°W$).

(i) Bestimmen Sie die Entfernung der beiden Orte in Luftlinie.

(ii) Bestimmen Sie den Kurswinkel bei Abflug in Frankfurt.

(iii) Bestimmen Sie den nördlichsten Breitengrad der Reise (den Längengrad brauchen Sie nicht zu berechnen).

(iv) Beschreiben Sie in Worten, wie Sie berechnen können, wie nah Sie auf Ihrer Route an San Francisco ($S = 37,8°N,\ 122,4°W$) vorbei kommen. Wie entscheiden Sie, auf welcher Seite des Flugzeugs Sie sitzen müssen, um einen Blick auf die Stadt zu erhaschen?

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathcal{L}^{\uparrow}(3)$. Zeigen Sie, dass es $B_1, B_2 \in O(2)$ und $\eta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right).$$