
Probeklausur

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Hinweise:

- Versehen Sie alle Blätter mit Name und Matrikelnummer. Sie dürfen Vorder- und Rückseite beschreiben und bei Bedarf weitere Blätter nutzen.
- Sofern nicht anders angegeben müssen Sie alle Ihre Antworten immer begründen.
- Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind:
 - Ein beidseitig, handschriftlich beschriebenes DIN-A4 Blatt („Spickzettel“)
 - Zirkel und Lineal / Geodreieck
 - nicht-programmierbarer und nicht programmierter Taschenrechner
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Punkte:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

Note: _____

Name:

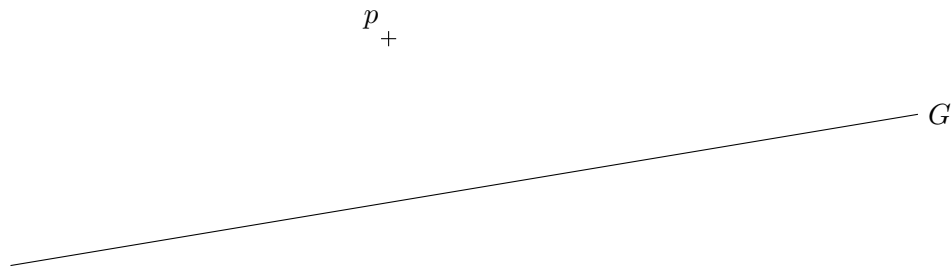
Matrikelnummer:

Aufgabe 1. • In jeder Teilaufgabe ist die Korrektheit der Konstruktion zu beweisen!

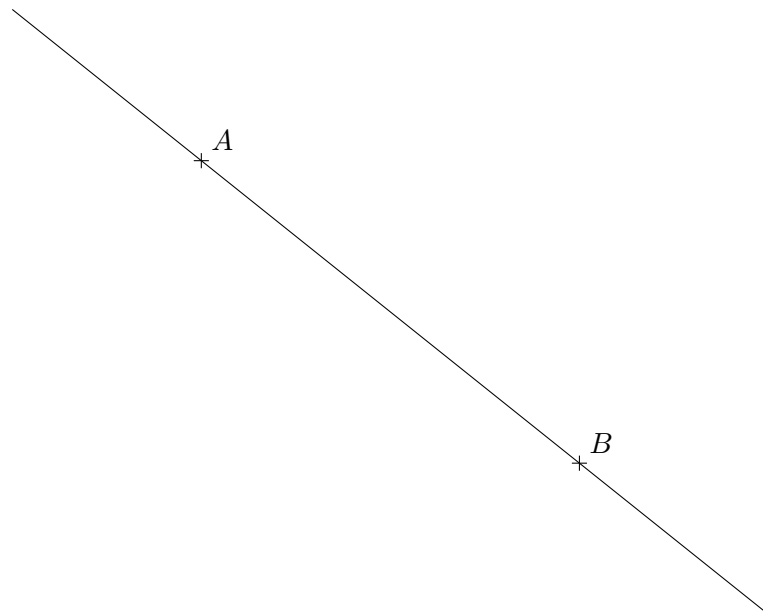
- Falls der Platz nicht reicht, führen Sie Ihre Konstruktion in einer vergleichbaren Zeichnung auf einem separaten Blatt durch.
- Konstruktionen, die in Vorlesung oder Übungen behandelt wurden, dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

Gegeben sei eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

- (i) Sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus G$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Parallele zu G durch p (Euclidea, Level $\varepsilon.1$).



- (ii) Seien $A, B \in G$. Konstruieren Sie einen Punkt $C \in G$, sodass $\|A - C\| = \frac{\|A - B\|}{5}$ (Euclidea, Level $\lambda.10$).

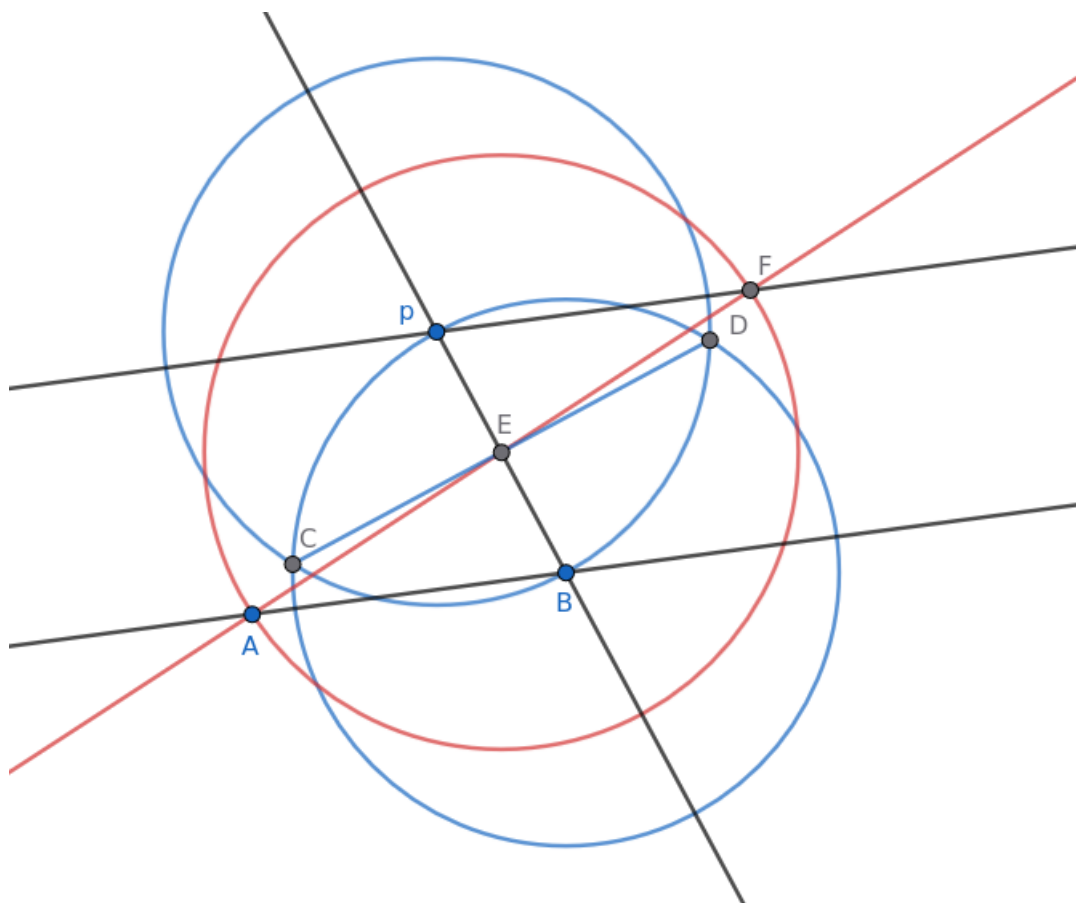


Name: _____

Matrikelnummer: _____

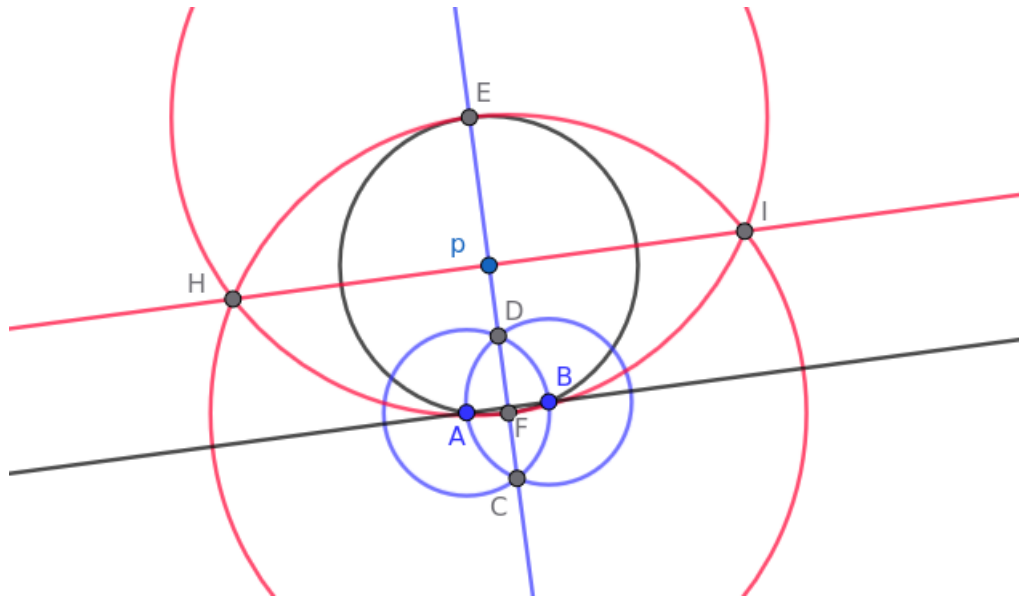
Lösung.

(i) Version 1: Parallelogramm



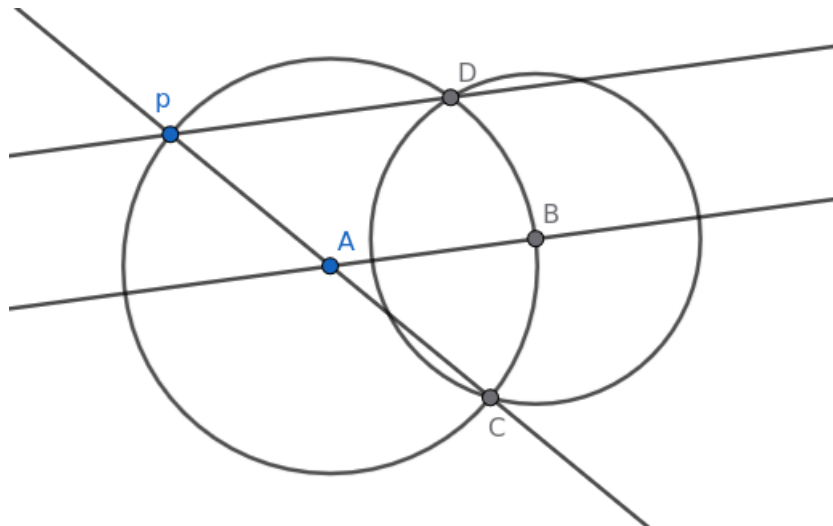
- Markiere zwei Punkte A und B auf der Geraden G .
- In Blau: Konstruiere den Mittelpunkt E von \overline{pB} . Dazu konstruiert man die Mittelsenkrechte von \overline{pB} wie von Blatt 4, Aufgabe 2, Teil (i) bekannt: Man zieht den Kreis um p durch B und den Kreis um B durch p . Die Schnittpunkte der Kreise seien C und D . Dann ist $G(C, D)$ die Mittelsenkrechte von \overline{pB} und der Schnittpunkt von \overline{pB} und \overline{CD} ist E .
- In Rot: Nun zeichnet man $G(A, E)$ ein und zieht den Kreis um E durch A . Der Schnittpunkt von $G(A, E)$ und dem Kreis sei F .
- $G(p, F)$ ist die gesuchte Parallele zu G . In der Tat: (p, A, B, F) bildet ein Parallelogramm nach dem Diagonalsatz, denn die Diagonalen halbieren sich gegenseitig:
 - $\|p - E\| = \|E - B\|$ nach Konstruktion von E
 - $\|A - E\| = \|E - F\|$, da A und F auf dem gleichen Kreis um E liegen.

Version 2: zwei rechte Winkel (diverse Untervarianten sind denkbar)



- Wähle $A \in G$ beliebig und ziehe den Kreis um p durch A . Der zweite Schnittpunkt von Kreis und G heiße B .
- In Blau: konstruiere die Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Dazu zieht man den Kreis um A durch B und den Kreis um B durch A . Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten C und D und $G(C, D)$ ist die gesuchte Mittelsenkrechte (Blatt 4, Aufgabe 2, Teil (i)).
- In Rot: Errichte das Lot auf $G(C, D)$ durch p . Dazu nutze die Schnittpunkte E und F des Kreises aus Schritt 1 mit $G(C, D)$. Ziehe Kreise um E durch F und um F durch E . Die Schnittpunkte der Kreise seien H und I und $G(H, I)$ ist orthogonal zu $G(C, D)$. In der Tat: H und I sind symmetrisch um $G(C, D)$, also ist auch $G(H, I)$ symmetrisch um $G(C, D)$, also orthogonal.
- Insgesamt ist also $G(H, I)$ parallel zu G .

Version 3: optimal

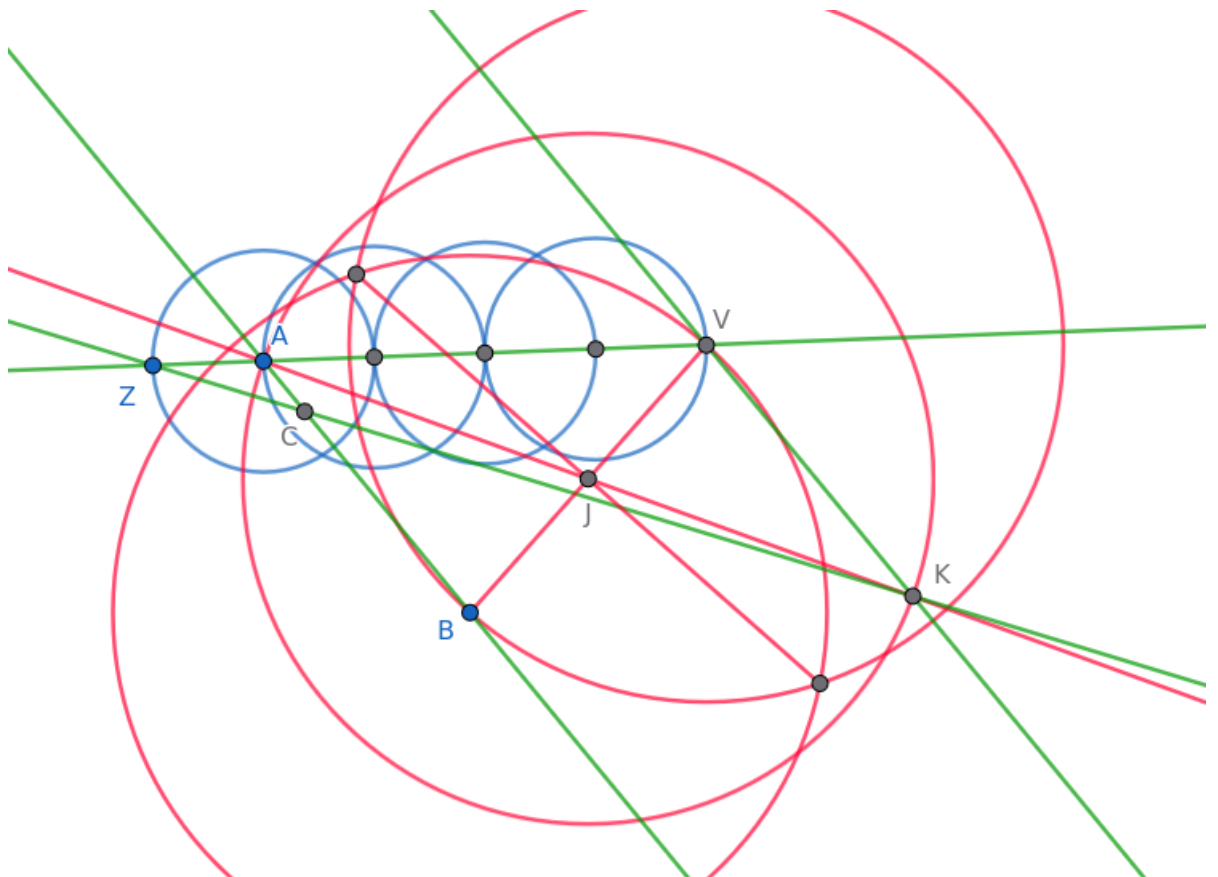


Name:

Matrikelnummer:

- Markiere einen Punkt A auf G und ziehe den Kreis um A durch p . Der Kreis schneidet G in zwei Punkten – sei B einer davon. Außerdem schneidet der Kreis $G(p, A)$ in zwei Punkten, nämlich p und einem weiteren – dieser heiße C .
- Ziehe den Kreis um B durch C . Dieser Kreis schneidet den Kreis aus Schritt 1 in zwei Punkten: C und einem weiteren Punkt D .
- $G(p, D)$ ist parallel zu G . In der Tat: $G(C, D)$ ist orthogonal zu $G(p, D)$ nach dem Satz des Thales (Blatt 3, Aufgabe 4, Teil (i)) angewandt auf das Dreieck (p, C, D) im Kreis um A . Außerdem ist $G(D, C)$ orthogonal zu G , denn die beiden Kreise um A und B sind symmetrisch um G und damit ist auch $G(D, C)$ symmetrisch um G und damit orthogonal zu G .

(ii)



- Markiere einen beliebigen Punkt $Z \notin G$ und Zeichne $G(Z, A)$.
- In Blau: Finde Punkt $V \in G(Z, A)$, indem man mit dem Zirkel von A aus $4\|A - Z\|$ abträgt. Es gilt also

$$\|Z - V\| = 5\|Z - A\|.$$

- In Rot: Nun ergänzt man wie in Teil (i), Lösungsvariante 1 die drei Punkte A, V, B zu einem Parallelogramm (V, A, B, K) . Insbesondere ist $G(V, K) \parallel G(A, B)$.

Geometrie WS 2025/26 — Probeklausur

Name:

Matrikelnummer:

- Finde den gesuchten Punkt C als Schnittpunkt von $G(A, B)$ und $G(Z, K)$. Der Punkt liefert das Gewünschte:

$$\begin{aligned}\frac{\|A - B\|}{\|A - C\|} &= \frac{\|V - K\|}{\|A - C\|} \\ &= \frac{\|Z - V\|}{\|Z - A\|} \\ &= 5\end{aligned}$$

da (V, A, B, K) ein Parallelogramm ist

Strahlensatz für die grünen Geraden

Nach Konstruktion von V

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$:

$$p \sim q \text{ genau dann wenn } p = \pm q.$$

Damit seien

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= S^2 / \sim \\ \mathcal{G} &= \{\overline{G} = G / \sim \mid G \text{ ist Großkreis in } S^2\} \\ \mathcal{I} &= \{(\overline{p}, \overline{G}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \mid \overline{p} \in \overline{G}\}. \end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^2 = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein Modell einer Inzidenzgeometrie ist. Gilt in dieser Geometrie das Parallelenaxiom?
- (ii) Wir definieren ein zweites Modell $(\mathbb{P}^2)^\vee = (\mathcal{P}^\vee, \mathcal{G}^\vee, \mathcal{I}^\vee)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\vee &= \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^\vee &= \mathcal{P} \\ \mathcal{I}^\vee &= \{(\overline{G}, \overline{p}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{P} \mid \overline{G} \ni \overline{p}\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}^2)^\vee$ isomorph zu \mathbb{P}^2 ist. Folgern Sie, dass auch $(\mathbb{P}^2)^\vee$ eine Inzidenzgeometrie ist.

Lösung.

- (i) **Axiom (I1):** *Durch je zwei Punkte gibt es eine Gerade.*
Axiom (I2): *Durch je zwei Punkte geht höchstens eine Gerade.*

Wir zeigen beides gleichzeitig: Seien $\overline{p}, \overline{q} \in \mathcal{P}$ verschiedene Punkte und wähle Repräsentanten $p, q \in S^2$. Da $\overline{p} \neq \overline{q}$ ist $p \neq \pm q$, also sind p und q verschieden und nicht antipodal. Also gibt es einen eindeutigen Großkreis G durch p und q in S^2 . Entsprechend ist $\overline{G} = G / \sim$ eine Gerade in \mathbb{P}^2 , die \overline{p} und \overline{q} enthält. Die Zuordnung

$$\{\text{Großkreise}\} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \overline{G} = G \longmapsto G / \sim$$

ist bijektiv, also ist \overline{G} eindeutig mit dieser Eigenschaft.

Axiom (I3): *Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.*

Großkreise in S^2 sind bijektiv zu $[0, 2\pi)$. Also enthalten sie sogar unendlich viele Punkte. Da Äquivalenzklassen unter \sim genau zweielementig sind, ist auch jedes G / \sim unendlich.

Axiom (I4): *Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ liegen nicht auf einer Geraden in \mathbb{P}^2 . Andernfalls lägen die Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 auf einem Großkreis in S^2 , was ein Widerspruch dazu ist, dass sie eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

Axiom (P): *Zu einer Geraden L und $p \notin L$ gibt es höchstens eine Gerade L' parallel zu L mit $p \in L'$.*

Das ist wahr, denn es gibt gar keine Parallelen. In S^2 schneiden sich verschiedene Großkreise $G \neq H$ immer in genau zwei antipodalen Punkten. Also schneiden sich zwei Geraden \overline{G} und \overline{H} in \mathbb{P}^2 immer in genau einem Punkt.

Name:

Matrikelnummer:

- (ii) Wir beschreiben eine Bijektion $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ wie folgt. Sei \bar{G} eine Gerade in \mathbb{P}^2 , also G ein Großkreis in S^2 . Dann ist $G = S^2 \cap E$ für einen 2-dimensionalen Untervektorraum $E \leq \mathbb{R}^3$. Sei E^\perp das orthogonale Komplement von E . Dann ist E^\perp 1-dimensional, schneidet also S^2 in zwei antipodalen Punkten $\pm v$. Wir definieren $\Phi(\bar{G}) = \bar{v}$.

Φ ist wohl-definiert: \bar{G} kommt von einem eindeutigen Großkreis G . Außerdem ist $\bar{v} = \overline{-v}$.

Φ ist bijektiv: $\Phi^{-1}(\bar{v})$ ist gegeben als $\overline{(\text{Span}(v))^\perp}$. Das ist invers zu Φ , denn $(U^\perp)^\perp = U$ für Vektorräume. Das ist wohl-definiert, denn $\text{Span}(v) = \text{Span}(-v)$.

Damit ergibt sich der Isomorphismus $\mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee$ von Modellen: Für Punkte ist er gegeben durch Φ^{-1} , für Geraden durch Φ . Das ist ein Morphismus von Modellen, denn Φ und Φ^{-1} sind kompatibel mit Inzidenz:

$$\begin{aligned} \bar{p} \in \bar{G} &\iff p \in G \iff \text{Span}(p) \subseteq \text{Span}(G) \\ &\iff \text{Span}(G)^\perp \subseteq \text{Span}(p)^\perp \iff \Phi(G) \ni \Phi^{-1}(p). \end{aligned}$$

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 3. Diese Aufgabe ist numerisch zu lösen. Ergebnisse sind in Kilometern anzugeben. Der Radius der Erde beträgt $R = 6.370$ km.

Sie fliegen von Frankfurt ($F = 50, 1^\circ N, 8, 7^\circ E$) nach Tahiti ($T = 17, 7^\circ S, 149, 4^\circ W$).

- (i) Bestimmen Sie die Entfernung der beiden Orte in Luftlinie.
- (ii) Bestimmen Sie den Kurswinkel bei Abflug in Frankfurt.
- (iii) Bestimmen Sie den nördlichsten Breitengrad der Reise (den Längengrad brauchen Sie nicht zu berechnen).
- (iv) Beschreiben Sie in Worten, wie Sie berechnen können, wie nah Sie auf Ihrer Route an San Francisco ($S = 37, 8^\circ N, 122, 4^\circ W$) vorbei kommen. Wie entscheiden Sie, auf welcher Seite des Flugzeugs Sie sitzen müssen, um einen Blick auf die Stadt zu erhaschen?

Lösung.

- (i) Zeichne „Poldreick“ mit Ecken $A =$ Nordpol, $B = T =$ Tahiti und $C = F =$ Frankfurt. Aus den Koordinaten der Orte liest man ab:

$$c = 90^\circ + 17, 7^\circ = 107, 7^\circ \quad b = 90^\circ - 50, 1^\circ = 39, 9^\circ \quad \alpha = 149, 4^\circ + 8, 7^\circ = 158, 1^\circ.$$

Die Entfernung Frankfurt – Tahiti ist die Kantenlänge a und diese berechnet man mit dem Seitenkosinussatz:

$$\cos(a) = \cos(107, 7^\circ) \cos(39, 9^\circ) + \sin(107, 7^\circ) \sin(39, 9^\circ) \cos(158, 1^\circ)$$

und man berechnet $a \approx 143, 15^\circ$. Umrechnung in Kilometer:

$$a \cdot \frac{2\pi R}{360^\circ} \approx 15.915, 3 \text{ km.}$$

- (ii) Wir berechnen zunächst den Winkel γ im Poldreieck aus Teil (i). Seitenkosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow \cos(\gamma) &= \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\sin(a) \sin(b)} = \frac{\cos(107, 7^\circ) - \cos(143, 15^\circ) \cos(39, 9^\circ)}{\sin(143, 15^\circ) \sin(39, 9^\circ)} \end{aligned}$$

und man berechnet $\gamma \approx 36, 3^\circ$.

Der Flug von Frankfurt nach Tahiti startet nach Westen (das sieht man durch Vergleich der Längengrade der beiden Orte; nach Osten wäre die Differenz $201, 9^\circ$, also ist der Weg nach Osten länger). Also ist γ der Winkel von Kompass Richtung Nord gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Der Kurs, den der Pilot steuern muss, beträgt also $323, 7^\circ$.

- (iii) Man nutzt die sphärische Höhenformel:

$$\sin(h_A) = \sin(b) \sin(\gamma) = \sin(39, 9^\circ) \sin(36, 3^\circ)$$

und man erhält $h_A = 22, 3^\circ$ für die Höhe des Poldreiecks. Der nördlichste Punkt auf der Reise liegt also bei $90^\circ - 22, 3^\circ = 67, 7^\circ$ nördlicher Breite.

Name:

Matrikelnummer:

- (iv) Berechne wie in Teil (ii) die Winkelgröße des Poldreiecks Nordpol – Frankfurt – San Francisco an der Ecke Frankfurt. Ist diese kleiner als γ aus Teil (ii), so liegt San Francisco nördlich der Route, also auf der rechten Seite des Flugzeugs. Ist der Winkel größer als γ in Teil (ii), dann liegt San Francisco südlich der Route.

Um den minimalen Abstand zu San Francisco zu berechnen bestimmt man die Höhe h_S des Dreiecks Tahiti – Frankfurt – San Francisco durch San Francisco. Laut Höhenformel benötigt man dazu den Abstand San Francisco – Frankfurt (bestimmt man mit dem Seitenkosinussatz so wie in Teil (i)) und den Winkel bei Frankfurt (ergibt sich als Kurswinkel des Flugs Frankfurt – Tahiti minus Kurswinkel Frankfurt nach San Francisco).

Führt man die Rechnung tatsächlich durch, so stellt man fest, dass San Francisco links der Route liegt – aber nur knapp! Der Winkel bei Frankfurt ist $36,9^\circ$ statt $36,3^\circ$ wie oben. Damit fliegt man in ca. 67 km Entfernung an San Francisco vorbei. Wenn Sie also auf der linken Seite am Fenster sitzen, können sie mit ein bisschen Glück die Golden Gate Bridge sehen.

Alternative: Man kann die Orte F , T und S zu Vektoren $v_F, v_T, v_S \in \mathbb{R}^3$ umrechnen. Bestimmt man den Normalenvektor

$$n = \frac{v_F \times v_T}{\|v_F \times v_T\|}$$

so ergibt sich der seitliche Abstand zwischen Flugroute und San Francisco als

$$\arccos\langle v_S, n \rangle - 90^\circ.$$

Die Seite links oder rechts ergibt sich durch das Vorzeichen dieses Winkels.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$. Zeigen Sie, dass es $B_1, B_2 \in O(2)$ und $\eta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right).$$

Lösung. Seien a_1, a_2, a_3 die Spalten von A . Dann ist $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine LONB.

- (i) Nutze eine Rotation um die e_1 -Achse $L_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B'_1 \end{array} \right)$ mit geeignetem $B'_1 \in O(2)$, sodass $L_1 a_1$ in der e_1 - e_2 -Ebene liegt.
- (ii) Nun gibt es ein η (genauer: $\eta = \pm d_H(L_1 a_1, e_1)$) mit $L_2 L_1 a_1 = e_1$, wobei

$$L_2 = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Das Lorentz-orthogonale Komplement von e_1 ist gerade die e_2 - e_3 -Ebene und eingeschränkt auf die e_2 - e_3 -Ebene ist das Minkowski-Produkt gleich dem Standardskalarprodukt. Da $\{L_2 L_1 a_1, L_2 L_1 a_2, L_2 L_1 a_3\}$ immernoch eine LONB ist, bilden also $L_2 L_1 a_2$ und $L_2 L_1 a_3$ eine klassische ONB der e_2 - e_3 -Ebene, d.h. wie haben

$$L_2 L_1 A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$$

mit $B_2 \in O(2)$.

Umstellen:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (B'_1)^{-1} \end{array} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(-\eta) & \sinh(-\eta) & 0 \\ \sinh(-\eta) & \cosh(-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L_2^{-1}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right)$$