Punktgruppe — diesmal richtig definiert

Felix Röhrle

In der Vorlesung haben wir über Ornamentgruppen gesprochen, d.h. diskrete Untergruppen $G \leq E(2)$ mit der Eigenschaft, dass

$$G_T = \{f \in G \mid f \text{ ist eine Translation}\}$$

ein Gitter in $\mathbb{R}^2$ bildet. Der zweite „Anteil“[1] der Ornamentgruppe G ist die Punktgruppe G_0. Die entsprechende Definition habe ich versucht, für die Vorlesung etwas zu vereinfachen – inzwischen haben aber manche von Ihnen bereits gewittert, dass das Ergebnis meiner Präsentation nicht mehr wirklich stichhaltig ist. Ich möchte hier ein paar Worte dazu sagen, wie die Punktgruppe richtig hätte definiert werden sollen. Leider ist das nicht so einfach, denn tatsächlich haben wir bereits in der euklidischen Geometrie flächendeckend mit einem vereinfachten Begriff von „euklidischer Ebene“ gearbeitet. Ein wirkliche Nachbesserung setzt also sehr tief an und kommt nicht ohne die Sprache der *Gruppenoperationen* oder *-wirkungen* aus, welche Sie in der Vorlesung zur Algebra erlernen, welche jedoch für die Geometrie nicht vorausgesetzt werden soll. Nichtsdestotrotz möchte ich Ihnen hier kurz aufzeigen, wie es richtig geht. Das Ergebnis ist eine sehr schöne und konzeptionell ansprechende Formulierung und ich lade Sie ein, sich mit den Gedanken zu befassen. **Dieses Material ist aber nicht klausurrelevant** und wenn Sie die Algebra Vorlesung noch nicht belegt haben, dann kommen Sie vielleicht gerne zu einem späteren Zeitpunkt in Ihrem Studium auf dieses Dokument zurück.

1 Die euklidische Ebene – diesmal richtig definiert

Die euklidische Ebene $\mathcal{E}$ ist eine Menge von Punkten, welche in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht. Im Grunde ist es sehr irreführend, $\mathbb{R}^2$ für die euklidische Ebene zu schreiben, denn $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum mit allerlei Struktur, welche $\mathcal{E}$ nicht haben sollte. Insbesondere sollte es in $\mathcal{E}$ keine 0 geben: in der Theorie der euklidischen Geometrie gibt es keinen ausgezeichneten Punkt!

Was aber richtig ist, ist dass $\mathbb{R}^2$ aufgefasst als Gruppe bezüglich der Addition auf $\mathcal{E}$ durch Translation operiert. Diese Operation ist strikt einfach transitiv, d.h. gegeben zwei beliebige Punkte $p, q \in \mathcal{E}$ gibt es genau ein Element $b \in \mathbb{R}^2$ mit $t_b(p) = q$. Dieses Element b heißt *Vektor* von p nach q und wird mit $\overrightarrow{pq}$ bezeichnet.

Generell ist nennt man eine Menge X mit einer strikt einfach transitiven Operation einer Gruppe G auch einen *G-Torsor*. Ein G-Torsor X ist immer bijektiv zu G, allerdings gibt es keine natürliche Wahl für die Bijektion. Genauer ist die Menge der Bijektionen $\{\Phi : G \to X \mid \text{Bijektion}\}$ selbst wieder ein G-Torsor (und damit bijektiv, aber nicht natürlich bijektiv, zu G selbst).

Konkret für die euklidische Ebene soll das heißen: $\mathcal{E}$ sieht als Punktmenge zwar aus wie $\mathbb{R}^2$, aber wenn Sie die beiden Mengen identifizieren wollen, dann müssen Sie eine unnatürliche Wahl treffen. Diese besteht in der Auswahl eines Elements von $\{\Phi : G \to X \mid \text{Bijektion}\}$ oder, äquivalent, in der Wahl eines Punktes $O \in \mathcal{E}$ (der „Ursprung“), der die Rolle von $0 \in \mathbb{R}^2$ spielen soll. Da diese Wahl unnatürlich ist, sollte sie vom theoretischen Standpunkt her entweder vermieden werden, oder man sollte sich stets überlegen, warum Beweise und Konstruktionen dann doch unabhängig von der Wahl sind.

Zum Beispiel können Sie einen Vektor $\overrightarrow{pq} \in \mathbb{R}^2$ am besten ausrechnen, indem Sie eine Bijektion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$ wählen. Dann sind die Punkte $\Phi^{-1}(p), \Phi^{-1}(q) \in \mathbb{R}^2$ selbst Vektoren und man rechnet

$$\overrightarrow{pq} = \Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p).$$

Zum Glück ist das wohldefiniert, denn eine andere Wahl von Identifikation $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$ unterscheidet sich höchstens um eine Verschiebung des Ursprungs. Und diese Verschiebung hebt sich in der Differenzenbildung zur Berechnung von $\overrightarrow{pq}$ wieder weg. Also ist $\overrightarrow{pq}$ wohldefiniert und die Differenz oben hängt gar nicht von Φ ab.

[1] Das darf man nicht wörtlich nehmen, denn G ist durch G_T und G_0 noch nicht eindeutig bestimmt.

2 Die euklidische Bewegungsgruppe – diesmal richtig

Die euklidische Bewegungsgruppe $E(2)$ ist nach wie vor die Gruppe aller Isometrien von $\mathcal{E}$ und $E(2)$ operiert auf $\mathcal{E}$ durch „Ausführen“ der entsprechenden Symmetrieoperation auf $\mathcal{E}$. A priori können Sie $f \in E(2)$ allerdings *nicht* als $f(x) = Ax + b$ schreiben! Diese Darstellung existiert erst nach und hängt ab von der Wahl einer unnatürlichen Identifikation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$. Vom abstrakten Standpunkt her sollte diese Darstellung also am besten gar nicht verwendet werden.

Allerdings gibt es eine weitere Gruppenoperation: $E(2)$ operiert auch auf der Menge der Vektoren von $\mathcal{E}$. Nochmal: zwei Punkte $p, q \in \mathcal{E}$ definieren den Vektor $\overrightarrow{pq} \in \mathbb{R}^2$ von p nach q (ja, dieser liegt auf natürliche Weise in $\mathbb{R}^2$!). Ein $f \in E(2)$ wirkt auf $\overrightarrow{pq}$ durch

$$f.\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Anmerkung: Man sieht leicht, dass diese Wirkung nicht treu ist, den offenbar wirken Translationen $t_b \in E(2)$ als Identität auf der Menge der Vektoren.

3 Punktgruppe

Sei also $G \leq E(2)$ eine diskrete Untergruppe sodass $G_T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gitter bildet. Dann wäre die richtige Definition der Punktgruppe:

$$G_0 = \big\{ f \in O(2) \mid \exists g \in G : f \text{ wirkt auf dem Raum der Vektoren genauso wie } g \big\}.$$

Das unterscheidet sich von meiner Definition in der Vorlesung. Ich hatte $G_0 \leq G$ als den Stabilisator des Ursprungs definiert. Mit der konzeptionellen Betrachtung in diesem Dokument sollte nun aber klar sein, dass meine Definition unsinnigerweise von der Wahl der Identifikation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$ abhängt. Im Hinblick auf Aufgabe 4 auf Blatt 6 können Sie durch eine entsprechende Wahl von Φ erreichen, dass der Stabilisator von 0 die triviale Gruppe ist, wohingegen G_0 mit der Definition von oben eindeutig, eine intrinsische Eigenschaft von G, und in jedem drei Bilder von Aufgabe 4 eine interessante Gruppe ist.

4 Bewertung von Aufgabe 4 auf Blatt 6

Die Aufgabe wird anhand der Definition aus der Vorlesung bewertet. D.h. Sie zeichnen bitte in alle Muster das Gitter ein. Nachdem Sie diese Wahl getroffen haben, steht der Stabilisator der 0 fest und den verwenden wir hier zunächst als Punktgruppe.

5 Was bedeutet das alles für die Resultate der Vorlesung?

In diesem Dokument haben wir die euklidische Ebene neue definiert und Sie fragen sich nun bestimmt, was das mit den bisherigen Resultaten der Vorlesung macht. Die kurze Antwort ist: es ändert sich nichts. Im Kapitel zu euklidischen Geometrie haben wir stets eine unnatürliche Identifikation $\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^2$ gewählt, um in Koordinaten arbeiten zu können. Allerdings sind alle Ergebnisse, die wir damit bewiesen haben, tatsächlich unabhängig von dieser Wahl. Bedenken Sie dafür, dass beispielsweise Abstände $||p - q||$ und Winkel $\arccos \frac{\langle p-r, q-r \rangle}{||p-r|| \cdot ||q-r||}$ tatsächlich für Vektoren definiert sind. Und diese sind unabhängig von der Wahl des Ursprungs in $\mathcal{E}$ wie wir oben bereits diskutiert haben.

6 Schlussbemerkung

Die Ebene $\mathcal{E}$ als $\mathbb{R}^2$-Torsor aufzufassen ist ein mathematischer Trick, um die 0 (welche in $\mathbb{R}^2$ eine prominente Rolle spielt) zu „vergessen“. Hier eine weiterführende Frage zum nachdenken: Wenn wir $\mathbb{R}^2$ schreiben, dann gibt es implizit ein wohldefiniertes „Oben“, nämlich die Richtung der positiven y-Achse. In der euklidischen Geometrie sollte aber auch das eigentlich keine Rolle spielen. Wie können Sie diese unnatürliche Wahl im Aufbau der Theorie vermeiden?