

Geometrie – Einführung

Felix Röhrle (roehrle@math.uni-tuebingen.de)

14. Oktober 2025



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.
- Großer Umbruch im antiken Griechenland: erstmals ein formales System von Definitionen, Annahmen und Konstruktionen, welches Beweise zulässt.



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.
- Großer Umbruch im antiken Griechenland: erstmals ein formales System von Definitionen, Annahmen und Konstruktionen, welches Beweise zulässt.
- Euklids “Elemente” sammeln alles mathematisches Wissen der Zeit. Größtenteils geht es um Geometrie.



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.
- Großer Umbruch im antiken Griechenland: erstmals ein formales System von Definitionen, Annahmen und Konstruktionen, welches Beweise zulässt.
- Euklids “Elemente” sammeln alles mathematisches Wissen der Zeit. Größtenteils geht es um Geometrie.
- Begriff “Geometrie” kommt von griechisch “Erdmessung”.



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.
- Großer Umbruch im antiken Griechenland: erstmals ein formales System von Definitionen, Annahmen und Konstruktionen, welches Beweise zulässt.
- Euklids “Elemente” sammeln alles mathematisches Wissen der Zeit. Größtenteils geht es um Geometrie.
- Begriff “Geometrie” kommt von griechisch “Erdmessung”.
- Bis heute Grundlage unseres Verständnis von Mathematik.



Geschichte

- Schon 3000 v.Chr. waren gewisse geometrische Zusammenhänge bekannt. Anwendungen standen im Vordergrund.
- Großer Umbruch im antiken Griechenland: erstmals ein formales System von Definitionen, Annahmen und Konstruktionen, welches Beweise zulässt.
- Euklids “Elemente” sammeln alles mathematisches Wissen der Zeit. Größtenteils geht es um Geometrie.
- Begriff “Geometrie” kommt von griechisch “Erdmessung”.
- Bis heute Grundlage unseres Verständnis von Mathematik.
- Euklids wichtigstes Werkzeug: Konstruktionen mit idealisiertem Zirkel und Lineal (ohne Markierungen).



Zirkel-Lineal-Konstruktion

Erlaubt Operationen:

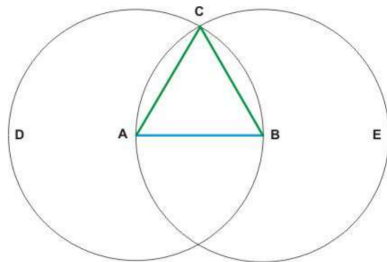
- 1 Beliebige Punkte in der Ebene markieren
- 2 Beliebige Punkte auf existierenden Strecken, Geraden, oder Kreisen markieren
- 3 Durch zwei Punkte eine Gerade zeichnen bzw. zwei Punkte durch eine Strecke verbinden
- 4 Schnittpunkte von Strecken, Geraden, und Kreisen markieren
- 5 Kreise um einen existierenden Mittelpunkt durch einen anderen Punkt zeichnen



Proposition 1 [Euklid]: gleichseitiges Dreieck auf $\overline{AB}$



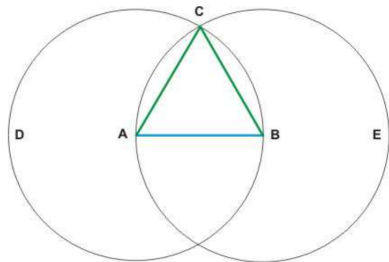
Proposition 1 [Euklid]: gleichseitiges Dreieck auf $\overline{AB}$



- Alle Punkt eines Kreises haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt (Definition).

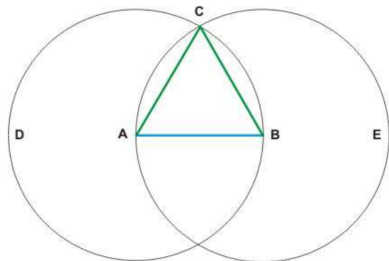


Proposition 1 [Euklid]: gleichseitiges Dreieck auf $\overline{AB}$



- Alle Punkt eines Kreises haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt (Definition).
- B und C liegen auf dem Kreis um A , also $\overline{AB} = \overline{AC}$

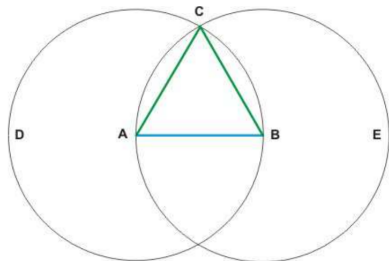
Proposition 1 [Euklid]: gleichseitiges Dreieck auf $\overline{AB}$



- Alle Punkt eines Kreises haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt (Definition).
- B und C liegen auf dem Kreis um A , also $\overline{AB} = \overline{AC}$
- Genauso: $\overline{AB} = \overline{BC}$



Proposition 1 [Euklid]: gleichseitiges Dreieck auf $\overline{AB}$



- Alle Punkt eines Kreises haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt (Definition).
- B und C liegen auf dem Kreis um A , also $\overline{AB} = \overline{AC}$
- Genauso: $\overline{AB} = \overline{BC}$
- Also sind alle drei Seiten des Dreiecks gleich lang (Transitivität von $=$).



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.
- Beispiel: Gauß konstruiert 1796 im Alter von 19 Jahren das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal.



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.
- Beispiel: Gauß konstruiert 1796 im Alter von 19 Jahren das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal.
- Aber: Aus heutiger Sicht gibt es Lücken/ Probleme mit Euklids Argumentation.



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.
- Beispiel: Gauß konstruiert 1796 im Alter von 19 Jahren das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal.
- Aber: Aus heutiger Sicht gibt es Lücken/ Probleme mit Euklids Argumentation.
- Warum schneiden sich die Kreise überhaupt?



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.
- Beispiel: Gauß konstruiert 1796 im Alter von 19 Jahren das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal.
- Aber: Aus heutiger Sicht gibt es Lücken/ Probleme mit Euklids Argumentation.
- Warum schneiden sich die Kreise überhaupt?
- Euklids Beweise waren trotz Idealisierungen immer noch an Beobachtungen aus der realen Welt gekoppelt.



Probleme mit Euklids Ansatz

- Euklids “Elemente” waren 2000 Jahre lang der Maßstab für mathematische Argumentation.
- Beispiel: Gauß konstruiert 1796 im Alter von 19 Jahren das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal.
- Aber: Aus heutiger Sicht gibt es Lücken/ Probleme mit Euklids Argumentation.
- Warum schneiden sich die Kreise überhaupt?
- Euklids Beweise waren trotz Idealisierungen immer noch an Beobachtungen aus der realen Welt gekoppelt.
- Seit Descartes (1596 – 1650) verwendet man Koordinaten in der Geometrie. Damit ergeben sich die Schnittpunkte von Kreise als Lösungen einer quadratischen Gleichung.



unmögliche Konstruktionen

- 1 Drittelung des Winkels
- 2 Verdopplung des Würfels
- 3 Quadratur des Kreises



unmögliche Konstruktionen

- 1 Drittelung des Winkels
- 2 Verdopplung des Würfels
- 3 Quadratur des Kreises

Diese Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal nicht möglich: Mit Zirkel und Lineal können nur Punkte konstruiert werden, deren Koordinaten in einer 2-Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ liegen (siehe Algebra Vorlesung).



Fazit

- Euklids Ansatz war revolutionär, aus heutiger Sicht aber nicht mehr mathematisch präzise / mächtig genug.



Fazit

- Euklids Ansatz war revolutionär, aus heutiger Sicht aber nicht mehr mathematisch präzise / mächtig genug.
- Zirkel und Lineal Konstruktion ist dennoch bis heute Bestandteil der schulischen Ausbildung.



Fazit

- Euklids Ansatz war revolutionär, aus heutiger Sicht aber nicht mehr mathematisch präzise / mächtig genug.
- Zirkel und Lineal Konstruktion ist dennoch bis heute Bestandteil der schulischen Ausbildung.
- In der Vorlesung werden wir Sätze im kartesischen Modell beweisen. Zirkel und Lineal Konstruktionen werden wir in den Übungen aufgreifen und Korrektheitsbeweise auf die Resultate der Vorlesung stützen.



Weitere Ressourcen

- Zirkel und Lineal Konstruktionen als Spiel mit 120 Levels:
<https://www.euclidea.xyz/>
- Mehr (historische) Betrachtungen zu Euklids Methode:
<https://www.youtube.com/watch?v=M-MgQC6z3VU>
- Gauß' Konstruktion des regelmäßigen 17-Eck:
<https://www.youtube.com/watch?v=87uo2TPrs18>