

Blatt 1

Abgabe im Fach Ihres Tutors oder per Upload auf URM. Abgabetermin: Mittwoch, 21.10., 16:00.
 Bitte versehen Sie Ihre Abgabe mit den Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder.

Aufgabe 1 – Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie für folgende Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind. Es sind keine Begründungen abzugeben, Sie sollten sich diese aber dennoch gründlich überlegen.

Aussage	Wahr	Falsch
1. Orthogonalität von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist eine Äquivalenzrelation.	☐	☐
2. $G_{p,v} = G_{q,w}$ genau dann, wenn es $t, \alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $p = q + tw$ und $v = \alpha w$.	☐	☐
3. Sei L eine Gerade. Die Menge der Normalenvektoren zu L bildet einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
4. Jede Gerade $G_{p,v}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
5. Jeder eindimensionale Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist eine Gerade.	☐	☐
6. Jede euklidische Bewegung $f \in E(2)$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ im Sinne der linearen Algebra.	☐	☐
7. Zu jeder euklidischen Bewegung $f \in E(2)$ gibt es ein $f^{-1} \in E(2)$, sodass $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$.	☐	☐
8. Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine euklidische Bewegung.	☐	☐
9. Sei G eine Gerade und $f \in E(2)$. Dann ist auch $f(G)$ eine Gerade.	☐	☐
10. Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation.	☐	☐

Aufgabe 2 – Kollinearität

Die Punkte $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ heißen *kollinear*, wenn es eine Gerade L gibt, sodass $P_i \in L$ für alle $i = 1, \dots, n$.

- (i) Sei $n \geq 2$. Wir betrachten n Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), \dots, P_n = (p_{nx}, p_{ny})$. Zeigen Sie, dass die Punkte kollinear sind, genau dann, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & \dots & p_{nx} \\ p_{1y} & p_{2y} & \dots & p_{ny} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leq 2$$

- (ii) Wir betrachten drei Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), P_2 = (p_{2x}, p_{2y}), P_3 = (p_{3x}, p_{3y}) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass diese Punkte genau dann kollinear sind, wenn

$$\det \begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

- (iii) Zeigen Sie, dass die Matrix aus Teil (i) Rang 1 hat, genau dann, wenn alle Punkte gleich sind: $P_1 = \dots = P_n$.

Aufgabe 3 – Darstellungen von Geraden

- (i) Die folgenden Mengen sind Geraden in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie eine Beschreibung in der Form $G_{p,v}$ wie in der Vorlesung:

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 1 = 0\}, \quad L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2026x - 2026y + 2026 = 0\}.$$

- (ii) Betrachten Sie die folgenden Geraden und finden Sie eine Darstellung durch eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ wie in (i):

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (iii) Bestimmen Sie die Punkte

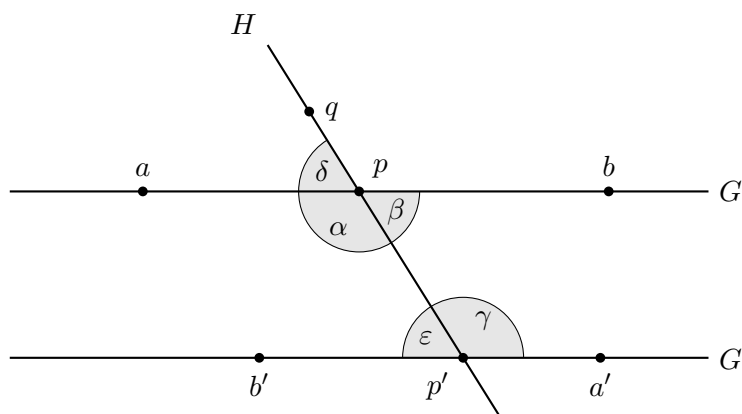
$$\{P_{13}\} = L_1 \cap L_3, \quad \{P_{24}\} = L_2 \cap L_4.$$

- (iv) Finden Sie eine Gleichung wie in (i) und eine Darstellung als $G_{p,v}$ für die Gerade $G(P_{13}, P_{24})$.

Aufgabe 4

Im Folgenden seien $G, G' \subseteq \mathbb{R}^2$ parallele Geraden, H eine Gerade mit $G \cap H = \{p\}$ und $G' \cap H = \{p'\}$. Weiter seien $a, b \in G \setminus \{p\}$ auf verschiedenen Seiten von p und $a', b' \in G' \setminus \{p'\}$ auf verschiedenen Seiten von p' , sodass außerdem a und a' auf verschiedenen Seiten von H liegen. Weiter sei $q \in H \setminus \{p, p'\}$, sodass p zwischen q und p' liegt. Wir definieren die folgenden Winkelgrößen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(a, p, p') & \beta &= \sphericalangle(b, p, p') & \gamma &= \sphericalangle(a', p', p) \\ \delta &= \sphericalangle(a, p, q) & \varepsilon &= \sphericalangle(b', p', p) \end{aligned}$$



Beweisen Sie die folgenden Sätze mit unserer Definition von Winkel. Achten Sie besonders auf eine saubere Argumentation in der Sprache der Vorlesung!

- (i) (Nebenwinkelsatz) $\alpha + \beta = \pi$
- (ii) (Scheitelwinkelsatz) $\beta = \delta$
- (iii) (Stufenwinkelsatz) $\delta = \varepsilon$
- (iv) (Wechselwinkelsatz) $\alpha = \gamma$ und $\beta = \varepsilon$