

Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra
Wintersemester 2026

Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag, 10.11.2026, 20:00 Uhr

Aufgabe 1

(2+4=6 Punkte)

- (a) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Seien $U_1, U_2 \subset V$ und $W_1, W_2 \subset V^\vee$ Untervektorräume. Beweisen Sie die folgende Relation für Annulatoren: $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

- (b) Sei $U \subset \mathbb{R}^5$ durch $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von U° .

Aufgabe 2

(2+2= 4 Punkte)

- (a) Welches $f \in (\mathbb{R}^3)^\vee$ erfüllt $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$?

- (b) Gibt es ein $f \in (\mathbb{R}^2)^\vee$ welches

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

erfüllt?

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis B und $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Zeigen Sie für die Abbildung

$$b'' : V \rightarrow V^\vee, w \mapsto b_w$$

aus der Vorlesung folgende Aussage: ${}_B M_{B^\vee}(b'') = M_B(b)$, wobei ${}_B M_{B^\vee}(b'')$ die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung b'' bezüglich der Basen B und $B^\vee$ und $M_B(b)$ die Gramsche Matrix von b bezüglich B bezeichne.

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Seien V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $\vartheta : V \rightarrow V/U$ die Restklassenabbildung. Zeigen Sie, dass das Paar $(V/U, \vartheta)$ folgender universeller Eigenschaft genügt:

Für alle $\mathbb{K}$ -Vektorräume W und linearen Abbildungen $f' : V \rightarrow W$ mit $f'|_U = 0$ existiert genau ein lineares $f : V/U \rightarrow W$ mit $f' = f \circ \vartheta$.

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM oder im Briefkasten.