UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra

Wintersemester 2023

Blatt 1

Abgabetermin: 7.11.2023, 16:00

Bezeichne $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Standardbasis B_n des $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist $B_n := (1, x^1, \ldots, x^n)$.

Aufgabe 1 **(4+4=8 Punkte)**

Die folgende Abbildung $\mathrm{ev}_{a,n}$ heißt *Auswertung in* $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{a,n} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} &\to \mathbb{R}, \\ p &\mapsto p(a). \end{aligned}$$

(a) Sei $B_n^\vee$ die zu B_n duale Basis. Schreiben Sie $\mathrm{ev}_{a,4}$ für $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ als Linearkombination von Basisvektoren aus $B_4^\vee$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die folgende lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \int_a^b : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\to \mathbb{R}, \\ p &\mapsto \int_a^b p \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Außerdem setzen wir $h := \frac{b-a}{3}$. Zeigen Sie, dass $\int_a^b, \mathrm{ev}_{a,3}, \mathrm{ev}_{a+h,3}, \mathrm{ev}_{a+2h,3}, \mathrm{ev}_{b,3} \in (\mathbb{R}[x]_{\leq 3})^\vee$ linear abhängig sind und bestimmen Sie eine nichttriviale Darstellung der Null für diese Elemente.

Aufgabe 2 **(4+1=5 Punkte)**

Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(a) Zeigen Sie, dass f^t genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass f^t genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist.

Sei V ein Vektorraum und sei $W \subset V^\vee$ ein Unterraum. Der Annulator $W^{\circledcirc}$ von W ist definiert als

$$W^{\circledcirc} := \{v \in V \mid g(v) = 0 \quad \forall g \in W\} \subset V.$$

Aufgabe 3 **(2+4=6 Punkte)**

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Seien $U_1, U_2 \subset V$ und $W_1, W_2 \subset V^\vee$ Untervektorräume. Beweisen Sie die folgenden Relationen für Annulatoren:

(a) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$,

(b) $(W_1 \cap W_2)^{\circledcirc} = W_1^{\circledcirc} + W_2^{\circledcirc}$.

Aufgabe 4 **(2+2+5=9 Punkte)**

Sei $V := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ (vergewissern Sie sich, dass V unendlich dimensional ist). Für $f \in V$ definieren wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 f : V &\to \mathbb{R}, \\ g &\mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dies induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \int_0^1 : V &\to V^\vee, \\ f &\mapsto \int_0^1 f. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ nicht surjektiv ist.

(*Hinweis: Folgendes Vorgehen könnte bei Teil (c) hilfreich sein: Wählen Sie* $p \in (0,1)$ *und betrachten Sie die Abbildung* $\delta_p : V \to \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$. *Zeigen Sie, dass* δ_p *nicht im Bild von* $\int_0^1$ *liegen kann.*)

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.