UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Wintersemester 2023

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 20.11.2023, 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^5$ durch $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von U°.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien V, W zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_j \mid j \in J)$ genau dann Basen von V bzw. W sind, wenn $(x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J)$ eine Basis von $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien V, W zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $L(V, W; \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Bilinearformen auf $V \times W$. Zeigen Sie, dass $V^\vee \otimes W^\vee \cong L(V, W; \mathbb{K})$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $\vartheta : V \to V/U$ die Restklassenabbildung. Zeigen Sie, dass das Paar $(V/U, \vartheta)$ folgender universeller Eigenschaft genügt:

Für alle $\mathbb{K}$-Vektorräume W und linearen Abbildungen $f' : V \to W$ mit $f' \mid_U = 0$ existiert genau ein lineares $f : V/U \to W$ mit $f' = f \circ \vartheta$.

Aufgabe 5* (3* Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ bilinear ist. Wie sieht der Graph G von f in $\mathbb{R}^3$ aus? Zeigen Sie, dass die Fläche $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Vereinigung von Geraden (d.h. affinen 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^3$) ist.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.