UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Wintersemester 2023

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 5.12.2023, 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien die $\mathbb{K}$-Vektorräume $U := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\} \subset \mathbb{K}^n$ und $V := \{(b, \ldots, b) \mid b \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^m$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ für alle $n \geq 2, m \geq 1$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Schreiben Sie den Tensor

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 31 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$$

als minimale Summe von reinen Tensoren.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$ gegeben. Seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und $g \in \operatorname{End}(W)$ zwei Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t) \quad \text{und} \quad \chi_g(t) = \prod_{j=1}^m (\mu_j - t).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{f \otimes g}(t)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Für zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W und $r \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $z := \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ ein nicht-trivialer Tensor in $V \otimes W$. Zeigen Sie, dass der Rang von z genau dann gleich r ist, wenn die Familien $(x_1, \ldots, x_r)$ und $(y_1, \ldots, y_r)$ in V bzw. W linear unabhängig sind.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.