UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Wintersemester 2023

Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 19.12.2023, 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times n', \mathbb{K}), B \in \mathrm{Mat}(m \times m', \mathbb{K}), C \in \mathrm{Mat}(n' \times n'', \mathbb{K}), D \in \mathrm{Mat}(m' \times m'', \mathbb{K})$ Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D)$,

(b) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Nehmen Sie an, dass A, B quadratisch sind und zeigen Sie:

(c) Wenn A, B symmetrisch sind, dann ist $A \otimes B$ symmetrisch.

(d) $\det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n$

(e) Wenn A und B invertierbar sind, dann gilt $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Dehninvariante eines gleichseitigen Tetraeders.

(b) Seien $A := (1, 0, 0), B := (0, 0, 1), C := (1, 1, 0)$ und $D := (0, 0, 0)$ die Eckpunkte eines Tetraeders. Bestimmen Sie die Dehninvariante dieses Tetraeders.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei ein Rechteck R in $\mathbb{R}^2$ mit Kantenlängen a, b gegeben, das in $n \in \mathbb{N}_{>0}$ kleinere Rechtecke mit Kantenlängen a_i, b_i mit $i = 1, \ldots, n$ rekursiv wie folgt zerlegt werden kann: Zerlege R durch einen Schnitt parallel zu zwei von dessen Seiten in kleinere Rechtecke und wiederhole diese Prozedur in den kleineren Rechtecken. Zeigen Sie, dass a oder b rational ist, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahl a_i oder b_i rational ist.

(*Hinweis: Ordnen Sie dem Rechteck ein Element in $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ zu. Betrachten Sie anschließend die komponentenweise Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.*)

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, wenn je zwei Punkte $x, y \in K$ durch ein Geradenstück verbunden werden können, das ganz in K liegt, d.h., wenn $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset K$ für alle $x, y \in K$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $K := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge von Punkten. Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{\substack{K' \subset \mathbb{R}^d, K \subset K' \\ K' \text{ konvex}}} K' = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

gilt und schlussfolgern Sie, dass Polytope beschränkt sind.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.