UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 5

Abgabetermin: 09.01.2024, 16:00

Aufgabe 1 (6 + 2 + 2 Punkte)
Seien R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Wir definieren der Radikal von I als

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \text{ es existiert } n \in \mathbb{N} \text{ so dass } a^n \in I\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass I radikal ist genau dann, wenn $I = \sqrt{I}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$, sodass $\sqrt{I}$ radikal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Seien R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Zeigen Sie dass

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Aufgabe 3 (2 + 6 + 2 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring, $R[x]$ der Polynomring und $\alpha \in R$. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathrm{ev}_\alpha \colon R[x] \longrightarrow R, \qquad \mathrm{ev}_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$$

Genauer gesagt, wenn $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, dann $\mathrm{ev}_\alpha(f(x)) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \alpha^i$.

(a) Zeigen Sie, dass ev_α ein surjektives Ringhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ker} \mathrm{ev}_\alpha = (x - \alpha)$. [*Hinweis: Ausgabe 2 kann hilfreich sein.*]

(c) Zeigen Sie, dass R ein Körper ist, genau dann, wenn $(x - \alpha)$ maximal ist, und dass R ein Integritätsbereich ist genau dann, wenn $(x - \alpha)$ prim ist.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)
Wir betrachten der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ und das ideal $I = (2, x)$.

(a) Zeigen Sie, dass I kein Hauptideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist. [*Hinweis: finden Sie ein surjektives Ringhomomorphismus* $\phi \colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *so dass* $\operatorname{Ker} \phi = I$].

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.