UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2019

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 16.1.2023, 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (1+4=5 Punkte)

Sei $E := (e_1, \dots, e_4)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und sei $\alpha \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ durch $\alpha := e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \bigwedge^3 \mathbb{R}^4,\ x \mapsto x \wedge \alpha$ linear ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_E M_B(f)$ von f bezüglich der Basen E und B, wobei die Basis B von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ durch $B := (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Seien $v'_1, \dots, v'_n \in V$, und seien $U := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ und $U' := \langle v'_1, \dots, v'_n \rangle$ zwei Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $U = U'$ genau dann gilt, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda(v'_1 \wedge \dots \wedge v'_n)$.

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Sei f von endlichem Rang $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}\left(\bigwedge^n f\right) = \binom{m}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f hat endlichen Rang.

(2) Für *fast alle* (d.h. für alle bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\bigwedge^n f = 0$.

(3) Es existiert ein $s \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\bigwedge^s f = 0$.

Wir definieren die *Spur* einer quadratischen Matrix als Summe ihrer Diagonaleinträge. Für einen Endomorphismus f definiert man $\operatorname{Spur}(f)$ als Summe der Diagonaleinträge einer beliebigen Darstellungsmatrix von f. Man kann zeigen, dass die Spur einer Matrix unter Basiswechsel invariant ist (das folgt zum Beispiel direkt aus Aufgabe 3(b) von Blatt 10 der linearen Algebra I). Deshalb ist $\operatorname{Spur}(f)$ wohldefiniert. Außerdem definieren wir $\bigwedge^0 V := \mathbb{K}$ und $\bigwedge^0 f := \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k$. Zeigen Sie, dass $a_k = (-1)^{n-k} \operatorname{Spur}\left(\bigwedge^k f\right)$ für $k = 0, \dots, n$ gilt.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.