UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 6

Abgabetermin: 23.02.2023, 16:00

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)
Sei K ein Körper. Wir betrachten das Polynomring $K[x]$.

(a) Zeigen Sie dass $f(x) \in K[x]$ invertierbar ist genau dann, wenn $f(x) \neq 0$ und $\deg(f(x)) = 0$. Das bedeutet dass $f(x) = c$, mit $c \in K, c \neq 0$.

(b) Sei $f(x) \in K[x]$ mit $\deg(f(x)) > 0$ nicht irreduzibel. Zeigen Sie dass $g(x), h(x) \in K[x]$ existieren mit $f = gh$ und $0 < \deg(g(x)), \deg(h(x)) < \deg(f(x))$.

(c) Sei $f(x) \in K[x]$ mit $\deg(f(x)) = 1$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel ist.

(d) Sei $f(x) \in K[x]$ mit $\deg(f(x)) = 2$ oder $\deg(f(x)) = 3$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ reduzibel ist genau dann wenn $\alpha \in K$ so dass $f(\alpha) = 0$ existiert.

(e) Beweisen Sie, dass $x^3 + x + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ ist.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)
Führen Sie in folgende Fälle die Polynomdivision für $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ durch: Es sollen $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gefunden werden, sodass $f = qg+r$ und $r = 0$ oder $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ gilt. Zeigen Sie ihre Rechnungen.

(a) $f(x) = x^5 + x^2 + x$ und $g(x) = x^2 + 1$.

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ und $g(x) = x + 3$.

(c) $f(x) = x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x + 1$ und $g(x) = x + 1$ womit $n \geq 1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Sei R ein Hauptidealring und $p \in R$ ein Primelement. Beweisen Sie, dass das Ideal (p) maximal ist.

Aufgabe 4 (2+2+2+2+2 Punkte)
Sei $i \in \mathbb{C}$ so dass $i^2 = -1$. Wir betrachten die Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

(b) Wir betrachten die folgende Abbildung, genannt Norm:

$$N \colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}, \qquad N(a + ib) = |a + ib|^2 = a^2 + b^2$$

Zeigen Sie, dass $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[i]$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{Z}[i]$ invertierbar ist, genau dann wenn $N(a) = 1$. Bestimmen Sie alle Einheitein in $\mathbb{Z}[i]$.

(d) Zeigen Sie, dass wenn $N(x)$ ein Primzahl ist, dann ist x irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

(e) Zeigen Sie, dass 2 nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$ ist.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.