

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 1

Abgabetermin: 31.10.2023, 16:00

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei G eine abelsche Gruppe

- (a) Zeigen Sie, dass $H = \{g \in G : g^2 = e\}$ eine Untergruppe von G ist. (6 Punkte)
- (b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (a), wenn wir nicht annehmen, dass G abelsch ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe.

- (a) Sei x ein Element von G . Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = x^{-1}$ äquivalent zu $x^2 = e$ ist. (2 Punkte)
- (b) Habe G nun endliche gerade Ordnung. Zeigen Sie, dass ein $x \in G \setminus \{e\}$ mit $x^2 = e$ existiert. (8 Punkte)

Aufgabe 3

Sei G eine endliche Gruppe und g ein Element dieser. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $g^n = e$ gibt. (10 Punkte)

Aufgabe 4

Sei G eine endliche Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : G \times G \rightarrow G$. Außerdem gelte für alle $a, x, y, u, v \in G$, das folgende

$$\begin{aligned}ax &= ay \Rightarrow x = y \\ua &= va \Rightarrow u = v\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass G mit dieser Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Hinweis: Es kann sinnvoll sein, die Existenz eines Linkseinselements und eines Rechtseinselements separat zu zeigen. Das gleiche gilt für Inverse. (10 Punkte)

**Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet
zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.**