

## Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

### Blatt 1

Abgabetermin: 31.10.2023, 16:00

---

#### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $G$  eine abelsche Gruppe

- (a) Zeigen Sie, dass  $H = \{g \in G : g^2 = e\}$  eine Untergruppe von  $G$  ist. (6 Punkte)
- (b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (a), wenn wir nicht annehmen, dass  $G$  abelsch ist. (4 Punkte)

---

#### Aufgabe 2

Sei  $G$  eine Gruppe.

- (a) Sei  $x$  ein Element von  $G$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung  $x = x^{-1}$  äquivalent zu  $x^2 = e$  ist. (2 Punkte)
- (b) Habe  $G$  nun endliche gerade Ordnung. Zeigen Sie, dass ein  $x \in G \setminus \{e\}$  mit  $x^2 = e$  existiert. (8 Punkte)

---

#### Aufgabe 3

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $g$  ein Element dieser. Zeigen Sie, dass es ein  $n \in \mathbf{N}$  mit  $g^n = e$  gibt. (10 Punkte)

---

#### Aufgabe 4

Sei  $G$  eine endliche Menge mit einer assoziativen Verknüpfung  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ . Außerdem gelte für alle  $a, x, y, u, v \in G$ , das folgende

$$ax = ay \Rightarrow x = y$$

$$ua = va \Rightarrow u = v$$

Zeigen Sie, dass  $G$  mit dieser Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Hinweis: Es kann sinnvoll sein, die Existenz eines Linkseinselements und eines Rechtseinselements separat zu zeigen. Das gleiche gilt für Inverse. (10 Punkte)

---

**Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.  
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet  
zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.**