

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag, 14.11.2023, 16:00 Uhr

Aufgabe 1

(7+3 Punkte)

Seien G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine endliche und nicht leer Teilmenge, welche unter der Verknüpfung von G abgeschlossen ist. Das heißt $ab \in H$ für alle $a, b \in H$.

- (a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.
 - (b) Ist das noch wahr wenn H unendlich ist? Geben Sie ein Beweis oder ein Gegenbeispiel.
-

Aufgabe 2

(3+2+5 Punkte)

Seien G eine Gruppe und $H \leq G, K \leq G$ zwei Untergruppen. Wir definieren die Teilmenge $HK \subseteq G$ als

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass HK eine Untergruppe ist, genau wenn denn $HK = KH$. Insbesondere passiert das wenn G kommutativ ist.

Nun nehmen wir an, dass H und K endlich sind und wollen die Kardinalität von HK berechnen. Hier wird nicht angenommen, dass HK eine Untergruppe ist.

- (b) Seien $h_1, h_2 \in H$. Zeigen Sie dass $h_1K = h_2K$ genau dann wenn $h_1(H \cap K) = h_2(H \cap K)$.
- (c) Zeigen Sie, dass $HK = \bigcup_{h \in H} hK$ und leiten Sie die Formel:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Aufgabe 3

(4+1+5 Punkte)

Sie G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert als

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine normale Untergruppe von G ist.
- (b) Zeigen Sie, dass G kommutativ ist, genau wenn denn $Z(G) = G$.
- (c) Nehmen wir an, dass $G/Z(G)$ zyklisch ist. Beweisen Sie, dass G kommutativ ist.

Aufgabe 4

(5+5 Punkte)

- (a) Sei X eine Menge und sei $S(X) = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ invertierbar}\}$ die symmetrische Gruppe von X . Zeigen Sie, dass $Z(S(X)) = \{id_X\}$ gilt, wenn X mehr als zwei Elemente hat.
- (b) Sei \mathbb{K} ein Körper. Zeigen Sie, dass

$$Z(GL_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{K}^* \right\}.$$

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet
zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.