UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 3

Abgabetermin: 28.11.2023, 16:00

Aufgabe 1 (4 + 4 + 2 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Wir schreiben $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ für den Kommutator zweier Elemente $x, y \in G$. Sei $[G,G]$ die Untergruppe von G erzeugt durch alle $\{[x,y] : x, y \in G\}$. Man zeige

(a) Die Untergruppe $[G,G]$ ist ein Normalteiler.

(b) Die Quotientengruppe $G/[G,G]$ ist abelsch.

(c) Sei H eine Normalteiler von G für G/H abelsch ist. Dann gilt $[G,G] \subset H$.

Aufgabe 2 (1 + 2 + 3 + 4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Betrachte für $g \in G$, die Konjugationsabbildung $k_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Man zeige:

(a) Die Abbildung k_g ist ein Gruppenautomorphismus.

(b) Die Abbildung $\phi : G \to \operatorname{Aut}(G)$, $g \mapsto k_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Der Kern von ϕ ist das Zentrum von G.

(c) Das Bild von ϕ ist ein Normalteiler von $\operatorname{Aut}(G)$. (Die Faktorgruppe $\operatorname{Aut}(G)/\operatorname{im}(\phi)$ heißt äußere Automorphismengruppe).

Aufgabe 3 (5 + 2 + 3 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow GL_2(\mathbb{R}), \qquad \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern $\ker \phi$.

(c) Zeigen Sie, dass das Bild von ϕ die Untergruppe

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \,|\, AA^t = \mathrm{Id}_2, \quad \det(A) = 1 \right\}$$

ist. Sie wird die Drehgruppe genannt. Erklären Sie den Name anhand einer Skizze.

Aufgabe 4 (1 + 3 + 4 + 2 Punkte)
Wir betrachten die Untergruppe D_n von $GL_2(\mathbb{R})$, welche von den folgenden beiden Elementen erzeugt wird:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Erklären sie den Zusammenhang dieser Gruppe mit den Symmetrien eines n-Ecks anhand einer Skizze.

(b) Beweisen Sie, die folgenden Relationen (Aufgabe 3.(a) kann hilfreich sein)

$$A^n = B^2 = \mathrm{Id}_2, \; BAB = A^{-1}.$$

(c) Zeigen Sie, dass jedes Element von D_n eindeutig in der Form $A^i B^e$ mit $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $e \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann. Berechnen Sie damit die Ordnung $|D_n|$.

(d) Zeigen Sie, dass $\langle A \rangle$ ein Normalteiler von D_n ist und dass $D_n / \langle A \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Die Lösungen der Übungsblätter sollten auf URM hochgeladen werden.
Das Repetitorium zu Algebraischen Strukturen als Teil der Linearen Algebra II findet zweiwöchentlich mittwochs von 8-10 Uhr im Hörsaal N09 statt.