UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Daniele Agostini
Clemens Nollau

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen

Wintersemester 2023

Blatt 4

Abgabetermin: 12.12.2023, 16:00

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 Punkte)
Wir betrachten die Ordnung von Permutationen in S_n.

(a) Sei $\sigma \in S_n$ ein k-Zyklus. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(\sigma) = k$.

(b) Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ zwei disjunkte Zyklen. Zeigen Sie, dass $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ und $\langle\sigma_1\rangle \cap \langle\sigma_2\rangle = \{\mathrm{id}\}$ gelten.

(c) Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ zwei disjunkte Zyklen. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(\sigma_1\sigma_2) = kgV(\operatorname{ord}(\sigma_1), \operatorname{ord}(\sigma_2))$.

Aufgabe 2 (2+8 Punkte)
Wir betrachten die alternierende Gruppe $A_n \leq S_n$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element in A_n das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist.

(b) Zeigen Sie, dass A_n erzeugt von 3-Zykeln wird.

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 Punkte)
Sei $m \neq 0$ eine ganze Zahl. Wir definieren eine Ringstruktur auf $R = \mathbb{Z}^2$:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac + mbd, ad + bc) \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

(b) Sei m eine Quadratzahl. Finden Sie einen Nullteiler in R.

(c) Sei m diesmal keine ganze Quadratzahl. Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)
Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Wir definieren auf der Menge der Endomorphismen von G $\operatorname{End}(G)$ eine Ringstruktur wie folgt:

$$\phi + \psi := (g \in G \mapsto \phi(g) + \psi(g)),$$
$$\phi \cdot \psi := \phi \circ \psi \ \forall \phi, \psi \in \operatorname{End}(G).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{End}(G)$ ein Ring ist.

(b) Finden Sie einen Nullteiler in $\operatorname{End}(\mathbb{Z}^2)$.