3. Äußeres Produkt und äußere Algebra

3.1 Alternierende Abbildungen und äußeres Produkt

3.1.1 Def (Alternierende Abbildungen)

Eine bilineare Abbildung heißt <u>alternierend</u>, falls
$f(x,x) = 0 \quad \forall\, x \in V.$

Eine multilineare Abbildung $f: V \times \cdots \times V \longrightarrow W$ heißt <u>alternierend</u>, falls $\forall\, (x_1, \ldots, x_r):\ \exists\, i \neq j$ mit $x_i = x_j$ gilt $f(x_1, \ldots, x_r) = 0.$

<u>Bsp</u>: Die Determinante $\det: K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ (betrachtet als Abbildung auf den Spalten der Matrix) ist multilinear und alternierend.

3.1.2 Def (Charakteristik eines Körpers)

Sei K ein Körper. Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot 1 := \sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + \cdots + 1 = 0$ heißt, falls sie existiert, die <u>Charakteristik</u> des Körpers, $\operatorname{char}(K)$. Existiert kein solches n, sagen wir, K hat Charakteristik 0.

Bsp $\operatorname{char}(\mathbb{Q}) = \operatorname{char}(\mathbb{R}) = \operatorname{char}(\mathbb{C}) = 0$,
$\operatorname{char}(\mathbb{Z}_p) = p$

3.1.3 Lemma $\operatorname{char}(K)$ ist eine Primzahl.

Beweis: Angenommen, $\operatorname{char}(K) = n = m \cdot k$ mit $1 < m, k < n$. Da n die kleinste Zahl ist mit $n \cdot 1 = 0$, ist $m \cdot 1 \neq 0$, $k \cdot 1 \neq 0$
$\Rightarrow (m \cdot 1) \cdot (k \cdot 1) \neq 0 \Rightarrow n \cdot 1 \neq 0$ ↯. $\square$

3.1.4 Lemma Seien V, W Vektorräume über K.
Sei $f: V \times V \to W$ bilinear.
1) f alternierend $\Rightarrow f(x,y) = -f(y,x)$ $\forall x, y \in V$
2) Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2$.
f alternierend $\Leftarrow f(x,y) = -f(y,x)$ $\forall x, y \in V$.

Beweis:

1) $0 = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,y) + f(y,x)$

2) $f(x,x) = -f(x,x) \Rightarrow 2f(x,x) = 0$
$\Rightarrow f(x,x) = 0$ $\forall x \in V$ $\square$

3.1.5 Proposition Sei $f: V \times V \to W$ bilinear, $\tilde{f}$ die induzierte lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt, $\tilde{f}: V \otimes V \to W$. Dann gilt

f alternierend $\Leftrightarrow \langle x \otimes x \mid x \in V \rangle \subset \operatorname{Ker} \tilde{f}$

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi: V \times V \to V \otimes V$. Es gilt $\tilde{f} \circ \varphi = f$. Es gilt

$$\tilde{f}(x \otimes x) = \tilde{f}(\varphi(x,x)) = f(x,x).$$

Damit

$x \otimes x \in \operatorname{Ker} \tilde{f} \ \forall x \Leftrightarrow f$ alternierend. $\square$

<u>3.1.6 Def</u> (Äußeres Produkt)

Sei V ein Vektorraum über K, $r \geq 1$. Ein Paar (U, φ), wobei U ein Vektorraum über K ist und $\varphi: V \times \dots \times V \to U$ multilinear und alternierend, heißt <u>r-faches äußeres Produkt</u> von V, wenn (U, φ) der folgenden universellen Eigenschaft genügt:

$\forall (U', \varphi')$ (mit U' Vektorraum über K, $\varphi': V \times \dots \times V \to U'$ multilinear und alternierend) $\exists!$ lineare Abbildung $\Psi: U \to U'$ mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$:

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists! \Psi"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

Wir schreiben $U = \Lambda^r V = V \wedge \cdots \wedge V$ und unterschlagen φ in der Notation.

Für $x_1, \dots, x_r \in V$ schreiben wir $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r := \varphi(x_1, \dots, x_r)$. Die Bilder von φ nennen wir <u>reine Produkte</u> oder <u>zerlegbar</u>.

<u>3.1.7 Satz</u> (Eindeutigkeit äußeres Produkt)
Sei V ein K-Vektorraum, $r \geq 1$. Seien (U, φ) und (U', φ') zwei r-fache äußere Produkte von V. Dann $\exists!$ Isomorphismus $\Psi : U \xrightarrow{\cong} U'$ mit $\Psi \circ \varphi = \varphi'$.

<u>Beweis</u> wie beim Tensorprodukt mit der universellen Eigenschaft.

<u>3.1.8 Lemma</u> (Universelle Eigenschaft für Faktorräume)
Sei V ein Vektorraum über K.

Sei $U \subset V$ ein Unterraum,
$v: V \to V/U$ die Restklassenabbildung.
Das Paar $(V/U, v)$ genügt folgender universeller Eigenschaft:

$\forall$ $\mathbb{K}$-Vektorräume W und lineare Abbildungen $f': V \to W$ mit $f'|_U = 0$
$\exists!$ lineares $f: V/U \to W$ mit $f' = f \circ v$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "f'"'] & V/U \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u>

Wir definieren $f([x]) = f(\bar{x}) := f'(x)$.

Wohldefiniert: Sei $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow$

$\bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \overline{x-y} = \bar{0} \Rightarrow x-y \in U$

$\Rightarrow f'(x-y) = 0$ n. V. $\Rightarrow$

$f'(x) = f'(y)$.

Dann gilt $f' = f \circ v$. f ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. Wie man leicht nachrechnet, ist f linear. $\square$

3.1.9 Def

Sei V ein K-Vektorraum, $r \geq 1$.

$V_r :=$

$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \mid x_i \in V \ \forall i, \exists i \neq j : x_i = x_j \rangle$

$\subset V \otimes \cdots \otimes V$

3.1.10 Satz (Existenz äußeres Produkt)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \geq 1$.

Setze $\Lambda^r V = V \wedge \cdots \wedge V = \bigotimes^r V / V_r = V \otimes \cdots \otimes V / V_r$

und $\varphi : V^r \longrightarrow \Lambda^r V :$

$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_r := \overline{x_1 \otimes \cdots \otimes x_r}$

Dann ist $(\Lambda^r V, \varphi)$ r-faches äußeres Produkt von V.

Beweis: Sei $\phi : V^r \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$

die multilineare Abbildung ins Tensorprodukt und

$\nu : V \otimes \cdots \otimes V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V / V_r$

die Restklassenabbildung.

Dann ist $\varphi = \nu \circ \phi$.

φ ist damit multilinear.

Seien $x_1, \dots, x_r \in V$, $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$.

Dann ist $x_1 \otimes \dots \otimes x_r \in V_r$ und daher

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \nu(\phi(x_1, \dots, x_r)) = \nu(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)$$

$$= \overline{x_1 \otimes \dots \otimes x_r} = \overline{0} \text{ in } V \otimes \dots \otimes V / V_r .$$

$\Rightarrow$ φ ist alternierend.

Wir müssen noch zeigen, daß $(\Lambda^r V, \varphi)$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

Sei dazu $\varphi' : V^r \longrightarrow U$ eine multilineare alternierende Abbildung.

Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $\exists!$ $\Psi' : \otimes^r V \longrightarrow U$ mit $\Psi' \circ \phi = \varphi'$.

Da φ' alternierend ist, ist

$\Psi'|_{V_r} = 0$. Wegen der universellen Eigenschaft von Faktorräumen $\exists!$

$\Psi : \otimes V^r / V_r \longrightarrow U$ mit

$\Psi' = \Psi \circ \nu$.

$$
\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \bigotimes^r V \arrow[d, "\exists!\, \Psi'"] \\
& U'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bigotimes^r V \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\Psi'"'] & \bigotimes^r V / V_r \arrow[d, "\exists!\, \Psi"] \\
& U'
\end{tikzcd}
$$

Damit ist $\Psi : \Lambda^r V \longrightarrow U'$ eine lineare Abbildung mit

$$\Psi \circ \varphi = \Psi \circ \nu \circ \phi = \Psi' \circ \phi = \varphi'$$

$$
\begin{tikzcd}
V^r \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"] \arrow[ddr, "\varphi'"'] & & \Lambda^r V = \bigotimes^r V / V_r \arrow[ddl, "\exists\, \Psi"] \\
& \bigotimes^r V \arrow[ur, "\nu"] \arrow[d, "\Psi'"] & \\
& U' &
\end{tikzcd}
$$

Wir müssen noch zeigen, daß Ψ eindeutig ist mit dieser Eigenschaft.

Sei dazu $\Psi'' : \Lambda^r V \longrightarrow U'$ mit

$\Psi'' \circ \varphi = \varphi'$.

Setze $\Psi''' = \Psi'' \circ v$:

$$\bigotimes^r V \longrightarrow \bigotimes^r V / V_r = \Lambda^r V \longrightarrow U'$$

dann gilt $\Psi''' \circ \phi = \Psi'' \circ v \circ \phi = \Psi'' \circ \varphi = \varphi'$. Aus der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft beim Tensorprodukt folgt dann $\Psi''' = \Psi'$.

Damit ist $\Psi' = \Psi'' \circ v$ und aus der Eindeutigkeit von Ψ in der universellen Eigenschaft von Faktorräumen folgt $\Psi = \Psi''$. $\square$

3.1.11 Lemma (Rechenregeln in $V \wedge V$)

Sei V ein K-Vektorraum, $x, x', y, y' \in V$, $\lambda \in K$.

Dann gilt in $V \wedge V$:

1) $x \wedge (y + y') = x \wedge y + x \wedge y'$ und

$(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y$,

2) $\lambda (x \wedge y) = (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y)$,

insbesondere $0 \wedge y = x \wedge 0 = 0$,

3) $x \wedge y = -y \wedge x$.

<u>Beweis:</u> 1), 2) da $\varphi: V^r \longrightarrow \Lambda^r V$ multilinear ist, 3) da $\varphi: V^r \longrightarrow \Lambda^r V$ alternierend ist. Genauer:

$$0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y$$
$$= x \wedge y + y \wedge x. \qquad \square$$

<u>3.1.12 Satz</u> (Basis und Dimension des äußeren Produkts)

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

1) $\Lambda^r V = \{0\}$ für $r > n$.

2) $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ ist eine Basis von $\Lambda^r V$ für $1 \leq r \leq n$. Insbesondere gilt
$$\dim (\Lambda^r V) = \binom{n}{r}.$$

<u>Beweis:</u>

2) Wegen 2.1.8 ist $(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r} \mid 1 \leq i_j \leq n)$ eine Basis von $\otimes^r V$.

Damit ist $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_j \le n)$
ein Erzeugendensystem von $\Lambda^r V$.
Alle Produkte, in denen ein Faktor mehrfach vorkommt, sind 0.
Daher ist auch
$(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$ ein Erzeugendensystem von $\Lambda^r V$.

Wir müssen die lineare Unabhängigkeit zeigen. Setze $N = \binom{n}{r}$ und betrachte K^N und die Basis $(e_{i_1 \dots i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$.

Wir konstruieren eine alternierende multilineare Abbildung $\alpha : V^r \longrightarrow K^N$:

Sei $(y_1, \dots, y_r) \in V^r$ mit

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \forall \; i = 1, \dots, r.$$

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$

Für $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$ sei

$A(j_1, \dots, j_r)$ die Determinante der Matrix, die aus den Spalten $j_1, \dots, j_r$ von A besteht.

Setze

$$\alpha : V^r \longrightarrow K^N : (y_1, \dots, y_r) \longmapsto \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} A(i_1, \dots, i_r) e_{i_1 \dots i_r}$$

Da det alternierend und multilinear ist, ist α alternierend und multilinear.

Es gilt $\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = e_{i_1 \dots i_r}$

Aus der universellen Eigenschaft des äußeren Produkts folgt die Existenz einer linearen Abbildung

$$\Lambda^r V \longrightarrow K^N : x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \longmapsto e_{i_1 \dots i_r}$$

Da $(e_{i_1 \dots i_r})$ eine Basis von K^N ist, ist diese Abbildung surjektiv, also folgt $\dim \Lambda^r V \geq N$.

Da $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$ $\Lambda^r V$ erzeugt, gilt $\dim \Lambda^r V \le N$.

Damit ist $\dim \Lambda^r V = N = \binom{n}{r}$ und $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$ ist Basis.

1) Wie in 2) ist

$B = (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$ eine Basis. Da $r > n$ ist $B = \emptyset$ und daher $\Lambda^r V = \{0\}$. $\square$

3.1.13 Korollar:

Sei $\dim_K V < \infty$, dann ist

$$\dim V = \max\{r \mid \Lambda^r V \neq \{0\}\}$$

Beweis:

Sei $\dim V = n$. Sei $r \leq n$, dann ist $\dim \Lambda^r V = \binom{n}{r} \neq 0$.

Sei $r > n$, nach Festlegung der Binomialkoeffizienten ist $\binom{n}{r} = 0 = \dim \Lambda^r V$. Damit folgt

$$\dim V = n = \max\{r \mid \binom{n}{r} \neq 0\}$$

$$= \max\{r \mid \dim_K \Lambda^r V \neq 0\}$$

$$= \max\{r \mid \Lambda^r V \neq \{0\}\}.$$

$\square$

3.1.14 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum, $r \geq 1$, $x_1, \dots, x_r \in V$.
Dann gilt:

$0 = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \in \Lambda^r V \iff x_1, \dots, x_r$ linear abhängig.

Beweis:

„$\Leftarrow$" Sei $x_1, \dots, x_r$ linear abhängig $\Rightarrow$
$\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

Sei oE $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i$

$$\Rightarrow x_1 \wedge \dots \wedge x_r = \left(-\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i\right) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r =$$

$$\sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) x_i \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r = 0$$

„$\Rightarrow$" Sei $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig.
Ergänze $x_1, \dots, x_r$ zu einer Basis $x_1, \dots, x_n$ von V. Dann ist $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ in einer Basis von $\Lambda^r V$ und kann daher nicht 0 sein. $\square$

3.1.15 Def

Seien V, W K-Vektorräume.

$\mathrm{Bil}(V,W) = \{ \varphi : V \times V \to W,\ \varphi \text{ bilinear} \}$

ist der Raum der bilinearen Abbildungen.

$\mathrm{Alt}(V,W) = \{ \varphi \in \mathrm{Bil}(V,W),\ \varphi \text{ alternierend} \}$

der Raum der alternierenden bilinearen Abbildungen.

Beide sind mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation K-Vektorräume.

3.1.16 Satz

1) $\mathrm{Bil}(V,W) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes V, W)$

   Insbesondere $\mathrm{Bil}(V,K) \cong (V \otimes V)^\vee$

2) $\mathrm{Alt}(V,W) \cong \mathrm{Hom}(V \wedge V, W)$

   Insbesondere $\mathrm{Alt}(V,K) \cong (V \wedge V)^\vee$

Beweis:

1) Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert

$$\alpha: \mathrm{Bil}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V\otimes V, W)$$
$$\varphi \longmapsto \Psi$$

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & V\otimes V \arrow[d, "\Psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

α ist linear:

$\alpha(\varphi_1)(x\otimes y) = \Psi_1(x\otimes y) = \varphi_1(x,y)$

$\alpha(\varphi_2)(x\otimes y) = \Psi_2(x\otimes y) = \varphi_2(x,y)$

$\alpha(\varphi_1+\varphi_2)(x\otimes y) = \varphi_1+\varphi_2(x,y) =$

$\varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) = \Psi_1(x\otimes y) + \Psi_2(x\otimes y)$

$= \Psi_1 + \Psi_2 (x\otimes y)$

Skalare Vielfache analog.

α ist injektiv:

Sei $\Psi_1 = \alpha(\varphi_1)$, $\Psi_2 = \alpha(\varphi_2)$,

$\Psi_1 = \Psi_2$. Dann gilt

$\Psi_1(x \otimes y) = \Psi_2(x \otimes y) \quad \forall x,y \in V$

$\Rightarrow \varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

α ist surjektiv:

Für $\Psi \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, W)$ setze

$\varphi(x,y) := \Psi(x \otimes y)$, damit ist

$\varphi \in \mathrm{Bil}(V,W)$ und $\alpha(\varphi) = \Psi$.

2) analog. $\square$

3.1.17 Proposition

Sei $\dim_K V < \infty$.

Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$V^\vee \wedge V^\vee \xrightarrow{\cong} \mathrm{Alt}(V,K)$.

3.1.18 Korollar

Sei $\dim_K V < \infty$.

$V^\vee \wedge V^\vee \cong (V \wedge V)^\vee$

Beweis:

$V^\vee \wedge V^\vee \xrightarrow[3.1.17]{\cong} \mathrm{Alt}(V,K) \xrightarrow[3.1.16(2)]{\cong} (V \wedge V)^\vee$ $\square$

Beweis von 3.1.17:

Seien $f, g \in V^\vee$.

Setze $\alpha(f,g): V \times V \longrightarrow K$

$$(x,y) \longmapsto \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$

Beh: $\alpha(f,g)$ ist bilinear und alternierend.

$$\alpha(f,g)(x+x', y) = \det \begin{pmatrix} f(x+x') & f(y) \\ g(x+x') & g(y) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} f(x)+f(x') & f(y) \\ g(x)+g(x') & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f(x') & f(y) \\ g(x') & g(y) \end{pmatrix} =$$

$\alpha(f,g)(x,y) + \alpha(f,g)(x',y)$.

Skalare Vielfache und zweite Komponente analog.

$$\alpha(f,g)(x,x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(x) \\ g(x) & g(x) \end{pmatrix} = 0$$

Damit definiert α eine Abbildung

$$\alpha: V^\vee \times V^\vee \longrightarrow \mathrm{Alt}(V, K)$$

Beh: α ist bilinear und alternierend.

$$\alpha(f+f', g)(x,y) = \det\begin{pmatrix} f+f'(x) & f+f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} f(x)+f'(x) & f(y)+f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} f'(x) & f'(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} =$$

$$\alpha(f,g)(x,y) + \alpha(f',g)(x,y)$$

Skalare Vielfache und zweite Komponente analog.

$$\alpha(f,f)(x,y) = \det\begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ f(x) & f(y) \end{pmatrix} = 0.$$

Mit der universellen Eigenschaft erhalten wir für $\alpha: V^\vee \times V^\vee \to Alt(V,K)$ ein lineares $\alpha': V^\vee \wedge V^\vee \longrightarrow Alt(V,K)$.

Beh: α' ist Isomorphismus.

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V und $(x_1^\vee, \dots, x_n^\vee)$ die duale Basis von $V^\vee$. Dann ist

$(x_i^\vee \wedge x_j^\vee \mid 1 \leq i < j \leq n)$ eine Basis von $V^\vee \wedge V^\vee$.

Es gilt

$$\alpha'(x_i^\vee \wedge x_j^\vee)(x_k, x_l) = \alpha(x_i^\vee, x_j^\vee)(x_k, x_l)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_i^\vee(x_k) & x_i^\vee(x_l) \\ x_j^\vee(x_k) & x_j^\vee(x_l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 1 & i = k,\ j = l \\ -1 & i = l,\ j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\varphi \in \mathrm{Alt}(V, K)$ beliebig.

Setze $\beta := \sum_{i<j} \varphi(x_i, x_j)\,(x_i^\vee \wedge x_j^\vee)$.

Es gilt $\beta \in V^\vee \wedge V^\vee$ und

$\alpha'(\beta)(x_k, x_l) =$

$\alpha'\left(\sum_{i<j} \varphi(x_i, x_j)(x_i^\vee \wedge x_j^\vee)\right)(x_k, x_l) =$

$\sum_{i<j} \varphi(x_i, x_j)\ \alpha'(x_i^\vee \wedge x_j^\vee)(x_k, x_l) =$

$$\begin{cases} \varphi(x_i, x_j) & \text{falls} \quad k < l \\ -\varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_j, x_i) & \quad k > l \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \alpha'(\beta) = \varphi$

und die Wahl dieses Urbilds von φ unter α' ist eindeutig. $\square$

3.2 äußere Produkte von Abbildungen und Koordinaten

3.2.1 Lemma (äußeres Produkt von Abbildungen)

Seien U, V, W K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $r \geq 1$.

1) $\exists!$ lineare Abbildung

$$\Lambda^r f : \Lambda^r U \longrightarrow \Lambda^r V :$$
$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \longmapsto f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)$$

2) $\Lambda^r (g \circ f) = \Lambda^r g \circ \Lambda^r f$

Beweis:

Wegen 2.2.1 $\exists!\ f\otimes\cdots\otimes f : \otimes^r U \to \otimes^r V$

mit $x_1\otimes\cdots\otimes x_r \longmapsto f(x_1)\otimes\cdots\otimes f(x_r)$

Dabei gilt $f\otimes\cdots\otimes f(U_r) \subset V_r$.

Betrachte $\nu\circ f\otimes\cdots\otimes f$:

$\otimes^r U \longrightarrow \otimes^r V \xrightarrow{\nu} \otimes^r V / V_r = \Lambda^r V$.

Es gilt $\nu\circ f\otimes\cdots\otimes f\,|_{U_r} = 0$.

Mit der universellen Eigenschaft des Faktorraums $\otimes^r U / U_r$ erhalten wir daraus das eindeutige

$\Lambda^r f : \Lambda^r U \longrightarrow \Lambda^r V$.

2) Folgt aus 2.2.1 (2). $\square$

<u>3.2.2 Lemma</u> (Koordinaten des $\Lambda^r K^n$)

Sei $(e_i \mid i=1,\dots,n)$ die kanonische Basis des K^n,

$(e_{i_1\dots i_r} := e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r} \mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le n)$

die Basis des $\Lambda^r K^n$.

Seien $y_1,\dots,y_r \in K^n$ mit

$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \quad i=1,\dots,r$, sei

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$ und

$A(j_1, \ldots, j_r)$ die Determinante der Matrix der Spalten $j_1, \ldots, j_r$ von A.

Dann gilt

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_r = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} A(i_1, \ldots, i_r)\, e_{i_1 \cdots i_r}$$

Insbesondere ist

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_n = \det(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

<u>Beweis:</u> Für $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ setze $p : K^n \longrightarrow K^r$ die Projektion auf die Koordinaten $i_1, \ldots, i_r$.

Dann gilt

$$\Lambda^r p : \Lambda^r K^n \longrightarrow \Lambda^r K^r \cong K$$

$$e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r} \longmapsto p(e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge p(e_{j_r})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } (j_1, \ldots, j_r) \neq (i_1, \ldots, i_r) \\ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $\Lambda^r p$ ist also die Projektion auf die Koordinate $(i_1, \ldots, i_r)$.

Betrachte

$$\Lambda^r p(y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) = p(y_1) \wedge \cdots \wedge p(y_r)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{r} a_{1 i_k} e_{i_k}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^{r} a_{r i_k} e_{i_k}\right)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \sigma : \{1,\dots,r\} \to \\ \{i_1,\dots,i_r\}}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

$$= A(i_1,\dots,i_r)\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}. \qquad \square$$

3.2.3 Lemma (Matrixdarstellung von $\Lambda^r f$)

Sei $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$, $r \leq \min\{n,m\}$

Sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$.

Sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis von V,

$C = (y_1,\dots,y_m)$ von W.

Sei $A = (a_{ij}) = {}_B M_C(f) \in \operatorname{Mat}(m\times n, K)$

Sei $B' = (x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$

Basis von $\Lambda^r V$,

$$C' = (y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m)$$

von $\Lambda^r W$.

Sei $A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r)$ die Determinante der Matrix aus den Zeilen $j_1, \dots, j_r$ und Spalten $i_1, \dots, i_r$.

Dann gilt

$$_{B'}M_{C'}(\Lambda^r f) = \left(A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r)\right)_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}}$$

<u>Beweis</u>:

$$\Lambda^r f(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}) = f(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(x_{i_r})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m a_{j i_1} y_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^m a_{j i_r} y_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq j_k \leq m} a_{j_1 i_1} \cdots a_{j_r i_r} \, y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \, a_{j_{\sigma(1)} i_1} \cdots a_{j_{\sigma(r)} i_r} \cdot y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} =$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r) \, y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_r} \quad \square$$

Bsp: Sei $\dim V = \dim W = n = r$,
$_B M_C(f) = (a_{ij}) = A$.

Dann ist

$$\Lambda^n f : \Lambda^n V \cong K \longrightarrow \Lambda^n V \cong K$$
$$x \longmapsto \det(A) \cdot x .$$

Bsp:

Das Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = V$$

liefert einen Vektor, der bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht auf den beiden anderen steht.

Durch

$$V \times \Lambda^2 V \longrightarrow \Lambda^3 V = K \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \cong K$$
$$(v, a \wedge b) \longmapsto v \wedge a \wedge b$$

wird ein Isomorphismus

$$\Lambda^2 V \xrightarrow{\cong} V^\vee :$$
$$a \wedge b \longmapsto (v \mapsto v \wedge a \wedge b)$$

definiert.

Das Skalarprodukt liefert einen Isomorphismus
$$V^\vee \xrightarrow{\cong} V$$
$$\langle\, , v\rangle \longmapsto v$$

Die Komposition
$$V \times V \longrightarrow \Lambda^2 V \xrightarrow{\cong} V^\vee \xrightarrow{\cong} V$$
$$(a, b) \longmapsto a \wedge b \mapsto (v \mapsto v \wedge a \wedge b)$$
ist das Kreuzprodukt:

Die Abbildung $(v \mapsto v \wedge a \wedge b) \in V^\vee$ liefert in Koordinaten:
$$v \mapsto \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$= v_1 \cdot \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - v_2 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + v_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + v_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + v_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Die Identifikation $V^\vee \cong V$ bildet die Abbildung ab auf $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

3.3 Äußere Algebra

3.3.1 Def (K-Algebra)

Ein K-Vektorraums $(A,+,\cdot)$, auf dem zusätzlich eine Multiplikation

$\circ : A \times A \to A : (x,y) \mapsto x \circ y$

definiert ist, so daß $(A,+,\circ)$ ein Ring mit 1 ist, heißt K-Algebra, falls die Skalarmultiplikation mit der Ringmultiplikation verträglich ist, dh. für $\lambda \in K$, $x,y \in A$ gilt

$$\lambda \cdot (x \circ y) = (\lambda \cdot x) \circ y = x \circ (\lambda y)$$

Bsp

$Mat(n,K)$, $End_K(V)$.

Jede Basis B von V liefert einen K-Vektorraum-Isomorphismus

$$End_K(V) \longrightarrow Mat(n,K)$$
$$f \longmapsto {}_BM_B(f),$$

da ${}_BM_B(f \circ g) = {}_BM_B(f) \cdot {}_BM_B(g)$

ist es sogar ein K-Algebren-Isomorphismus.

3.3.2 Def (Äußere Algebra)

Sei V ein K-Vektorraum.

Die äußere Algebra von V ist

$$\Lambda V := \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r V,$$

wobei $\Lambda^0 V := K$,

die direkte Summe der äußeren Produkte von V.

ΛV besitzt die Struktur eines K-Vektorraums, wir wollen jetzt noch ein Produkt definieren, so daß es eine K-Algebra wird.

3.3.3 Satz (Das Dachprodukt / Wedge-Produkt)

Sei V ein K-Vektorraum, $r, s \geq 1$.

Dann $\exists !$ bilineare Abbildung

$$m: \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r, \; y_1 \wedge \cdots \wedge y_s) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$$

Beweis: Wähle $(x_1, \dots, x_r) \in V^r$ fest.

Die Abbildung

$$V^s \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

$$(y_1, \dots, y_s) \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$$

ist multilinear und alternierend.

Wegen der universellen Eigenschaft erhalten wir daraus eine lineare Abbildung

$$\Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_s \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s.$$

Daraus erhalten wir

$$V^r \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^s V, \Lambda^{r+s} V)$$

$$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto (y_1 \wedge \dots \wedge y_s \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s)$$

Die Abbildung ist multilinear und alternierend, daher erhalten wir ein lineares

$$\mu: \Lambda^r V \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^s V, \Lambda^{r+s} V)$$

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \longmapsto (y_1 \wedge \dots \wedge y_s \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s)$$

Wir definieren

$$m : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$
$$(a, b) \longmapsto \mu(a)(b)$$

Dabei gilt: m ist bilinear und
$m(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s) =$
$\mu(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)(y_1 \wedge \dots \wedge y_s) =$
$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$.

Die Abbildung m ist eindeutig mit dieser Eigenschaft, da es die einzige Abbildung ist, für die

$$\begin{tikzcd}
V^r \times V^s \arrow[r] \arrow[dr] & \Lambda^r V \times \Lambda^s V \arrow[d, "m"] \\
& \Lambda^{r+s} V
\end{tikzcd}$$

$(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$

kommutiert.

$\square$

Wir setzen außerdem für $r \geq 0$:

$$m : \underbrace{\Lambda^0 V}_{= K} \times \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^r V$$
$$(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$$

3.3.4 Lemma (Eigenschaften des Dach-Produkts)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\wedge$ das Dachprodukt auf $\bigwedge V$.

Seien $a, b, c \in \bigwedge V$.

1) $\wedge$ ist assoziativ: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

2) $1 \in \bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ ist neutrales Element

3) $\wedge$ ist distributiv mit der Addition,
$(a+b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$
$a \wedge (b+c) = a \wedge b + a \wedge c$

4) $\wedge$ ist verträglich mit der Skalarmultiplikation
$\lambda \cdot (a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b)$.

<u>Beweis</u>: 3), 4) folgen aus der Multilinearität der Abbildung m aus 3.3.3.

1) ist klar auf den zerlegbaren Elementen und gilt wegen 3), 4) damit für alle.

2) folgt aus der Def. □

<u>3.3.5 Def</u> (graduierte Algebra)

1) Eine <u>graduierte</u> K-Algebra ist eine K-Algebra A zusammen mit einer Zerlegung $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ von A als direkte Summe von Untervektorräumen A_n, wobei für das Produkt gilt $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$.

2) Eine graduierte K-Algebra ist <u>kommutativ</u>, falls das Produkt kommutativ ist.

3) Eine graduierte K-Algebra

ist <u>antikommutativ</u>, falls $\forall a \in A_n$, $b \in A_m$ gilt $a \cdot b = (-1)^{nm}\, b \cdot a$.

<u>Bsp</u> $K[x] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K[x]_n$

mit $K[X]_n = \{\text{Polynome vom Grad } n\}$

ist eine kommutative graduierte K-Algebra.

<u>3.3.6 Lemma</u> (Antikommutativität des Dachprodukts)

Sei V ein K-Vektorraum, $r, s \geq 0$.

Für $a \in \Lambda^r V$, $b \in \Lambda^s V$ gilt

$$a \wedge b = (-1)^{rs}\, b \wedge a.$$

<u>Beweis:</u>

Es genügt, dies auf den zerlegbaren Elementen nachzurechnen.

Sei $a = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$, $b = y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$

$$\begin{aligned} b \wedge a &= y_1 \wedge \cdots \wedge y_s \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \\ &= (-1)^s\, x_1 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_s \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_r \end{aligned}$$

$= \cdots = (-1)^{rs} x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$

$\square$

Zusammen ergibt sich folgender Satz:

3.3.7 Satz (Äußere Algebra)

ΛV ist mit dem Dachprodukt eine graduierte, antikommutative K-Algebra.

3.3.8 Def

Für $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ sei $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_s\}$ mit $j_1 < \cdots < j_s$. Setze

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_r) := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$$

Dies ist das Vorzeichen, das wir erhalten, wenn wir in $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ die $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ nach vorne sortieren.

3.3.9 Lemma

$$\varepsilon(i_1, \dots, i_r) = (-1)^{\sum i_k - \binom{r+1}{2}}$$

Beweis:

Ein Paar (k, l) kann nur dann Fehlstand sein, wenn $k \leq r < l$.

Für festes k ist $(i_k - 1) - (k-1)$ die Anzahl der Fehlstände (k, l), denn von den Zahlen $1, \dots, i_k - 1$, die kleiner sind als i_k und daher potentiell Fehlstände liefern können, wenn sie nach k kommen, sind $i_1, \dots, i_{k-1}$ vor i_k.

$\Rightarrow$ # Fehlstände $= \sum_{k=1}^{r} (i_k - k) =$

$\sum i_k - \binom{r+1}{2}$.

$\square$

3.3.10 Satz (Allgemeiner Laplacescher Entwicklungssatz)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$, $1 \leq r \leq n$.

Sei $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ und

$1 \leq j_1 < \dots < j_{n-r} \leq n$ mit
$\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_r\} \,\dot\cup\, \{j_1, \dots, j_{n-r}\}$.

Dann gilt

$$\det(A) = \varepsilon(i_1, \dots, i_r) \cdot \sum_{\substack{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n \\ \{l_1, \dots, l_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} \varepsilon(k_1, \dots, k_r) A(k_1, \dots, k_r \mid i_1, \dots, i_r) \cdot A(l_1, \dots, l_{n-r} \mid j_1, \dots, j_{n-r})$$

<u>Bsp</u>: $r = 1$, $i_1 = 1$ liefert

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A \text{ ohne 1. Zeile und } j\text{. Spalte}),$$

die bekannte Laplacesche Entwicklung nach der ersten Zeile.

<u>Bsp</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad r = 2, \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$$

Summand für $\{k_1, k_2\}$: $\{1,2\}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} -$$

$\{1,3\}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{1,4\}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$\{2,3\}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{2,4\}$

$$-\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$\{3,4\}$

$$-\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u> des Laplaceschen Entwicklungssatzes 3.3.10:

$a_1, \dots, a_n$ bezeichne die Zeilen von A.

Dann gilt wegen 3.2.2

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \det(A) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Andererseits gilt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \varepsilon(i_1, \dots, i_r)\, a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_r} \wedge a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_{n-r}}$$

$$= \varepsilon(i_1, \dots, i_r) \cdot (a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_r}) \wedge (a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_{n-r}})$$

$$\overset{3.2.2}{=}$$

$$\overset{3.2.2}{=} \varepsilon(i_1,\dots,i_r) \cdot \left(\sum_{1 \le k_1 < \dots < k_r \le n} A(k_1,\dots,k_r \mid i_1,\dots,i_r)\, e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_r} \right)$$

$$\wedge \left(\sum_{1 \le l_1 < \dots < l_{n-r} \le n} A(l_1,\dots,l_{n-r} \mid j_1,\dots,j_{n-r})\, e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_{n-r}} \right)$$

fehlende Summanden haben Mehrfachnennungen

$$= \varepsilon(i_1,\dots,i_r) \cdot \sum_{\substack{1 \le k_1 < \dots < k_r \le n \\ \{l_1,\dots,l_{n-r}\} = \{1,\dots,n\} \setminus \{k_1,\dots,k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} A(k_1,\dots,k_r \mid i_1,\dots,i_r)\, A(l_1,\dots,l_{n-r} \mid j_1,\dots,j_{n-r}) \cdot e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_r} \wedge e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_{n-r}}$$

$$= \varepsilon(i_1,\dots,i_r) \cdot \sum_{\substack{1 \le k_1 < \dots < k_r \le n \\ \{l_1,\dots,l_{n-r}\} = \{1,\dots,n\} \setminus \{k_1,\dots,k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} \varepsilon(k_1,\dots,k_r)\, A(k_1,\dots,k_r \mid i_1,\dots,i_r) \cdot A(l_1,\dots,l_{n-r} \mid j_1,\dots,j_{n-r}) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\Longrightarrow \det(A) = \varepsilon(i_1,\dots,i_r) \cdot \sum_{\substack{1 \le k_1 < \dots < k_r \le n \\ \{l_1,\dots,l_{n-r}\} = \{1,\dots,n\} \setminus \{k_1,\dots,k_r\} \\ l_1 < \dots < l_{n-r}}} \varepsilon(k_1,\dots,k_r)\, A(k_1,\dots,k_r \mid i_1,\dots,i_r) \cdot A(l_1,\dots,l_{n-r} \mid j_1,\dots,j_{n-r})$$

$\square$