UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Art der Prüfüng: ☐ Klausur Algebraische Strukturen, ☐ Test Lineare Algebra II

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
von 10	von 10	von 10	von 10

Klausur Algebraische Strukturen **erreichte Punkte (von 30):** ___________ **Note:**

Test Lineare Algebra II **erreichte Punkte (von 40):** ___________ **Note:**

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur der Algebraischen Strukturen besteht nur aus den ersten drei Aufgaben, der Test der Linearen Algebra II besteht aus allen vier Aufgaben.
- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Sie können alle Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungsblättern verwenden, sollten sie aber zitieren.
- Wenn eine Übung aus mehreren Teilen besteht, können Sie die Ergebnisse der vorangegangenen Teile für die nachfolgenden Teile verwenden, auch ohne sie zu beweisen.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während der Klausur beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht findet am 13.2.2024 im Raum N14 von 9 bis 10 Uhr statt.

UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte) Wir betrachten die zwei Mengen

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass H und U Untergruppen von $GL_3(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass U isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von H ist. Ist U ein Normalteiler von $GL_3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. wir betrachten die Abbildung

$$\pi_n : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x], \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} [a_i] x^i$$

(a) Zeigen Sie dass π_n ein surjektives Ringhomomorphismus ist, und dass $\ker \pi_n = (n)$.

(b) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ prim ist, genau dann, wenn $n = p$ ein Primzahl ist.

(c) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ nie maximal ist.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 5 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring, und $I, J \subseteq R$ zwei Idealen. Wir definieren das Produktideal IJ als

$$IJ := (ij \mid i \in I, j \in J)$$

(a) Zeigen Sie, dass $IJ \subseteq I \cap J$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an in dem $IJ \subsetneq I \cap J$ gilt.

(c) Nehmen wir jetzt an, dass $I + J = R$. Zeigen Sie, dass $IJ = I \cap J$.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Seien V, W zwei K-Vektorräume. Seien $x_1, x_2 \in V$ linear unabhängige Vektoren und seien $y_1, y_2 \in W$ so gewählt, dass $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $y_1 = y_2 = 0$.

(b) Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_5 \in V$ und $\alpha \in \wedge^3 V$ definiert als

$$\alpha := 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_3 \wedge v_5 \wedge v_1 - v_4 \wedge v_3 \wedge v_5$$

. Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist.