UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte) Wir betrachten die zwei Mengen

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass H und U Untergruppen von $GL_3(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass U isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von H ist. Ist U ein Normalteiler von $GL_3(\mathbb{R})$?

Lösung:

(a) Wir sehen dass H ein Teilmenge von $GL_3(\mathbb{R})$ ist weil alle Matrizen in H Determinante 1 haben. Es ist auch klar dass $\mathrm{Id}_3 \in H$. Wir müssen zeigen dass H bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist. Seien $A, A' \in H$

$$\text{(i)} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dann } A \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & c + c' + ab' \\ 0 & 1 & b + b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das zeigt dass $AA' \in H$. Wir müssen auch zeigen dass $A^{-1} \in H$: die Berechnung von $(*)$ zeigt dass

$$\text{(ii)} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und das ist auch in H. Das zeigt dass H eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$ ist. Wir zeigen jetzt dass U eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$ ist. Es ist klar dass $U \subseteq H$ und $\mathrm{Id}_3 \in U$. Seien jetzt $B, B' \in U$

$$\text{(iii)} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Berechnungen in (i) und (ii) zeigen dass

$$\text{(iv)} \qquad B \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c + c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so dass $B \cdot B' \in U, B^{-1} \in U$ und U eine Untergruppe ist.

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \to U, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Berechnungen in (iv) zeigen dass f ein Gruppenhomomorphismus ist, und f ist injektiv und surjektiv. Das bedeutet dass f ein Isomorphismus ist.

(c) Um zu zeigen dass U ein Normalteiler von H ist, müssen wir zeigen dass $AB'A^{-1} \in U$ für alle $A \in H, B' \in U$. Seien A, B' wie in (i) und (iii). Die Berechnungen in (i) und (ii) zeigen dass

$$\begin{aligned} AB'A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a & c+c' \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B' \in U. \end{aligned}$$

Die Untergruppe U ist aber kein Normalteiler von $GL_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & c+1 \end{pmatrix}$$

und das ist nicht in U, wenn $c = 1$ zum Beispiel.

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. wir betrachten die Abbildung

$$\pi_n : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x], \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} [a_i] x^i$$

(a) Zeigen Sie dass π_n ein surjektives Ringhomomorphismus ist, und dass $\ker \pi_n = (n)$.

(b) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ prim ist, genau dann, wenn $n = p$ ein Primzahl ist.

(c) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ nie maximal ist.

Lösung:

(a) Seien $f = \sum_{i=0}^{h} a_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ in $\mathbb{Z}[x]$. Dann

$$\begin{aligned} \pi_n(f+g) &= \pi_n\left(\sum_{i=0}^{\max\{h,k\}} (a_i + b_i) x^i\right) = \sum_{i=0}^{\max\{h,k\}} [a_i + b_i] x^i = \sum_{i=0}^{\max\{h,k\}} ([a_i] + [b_i]) x^i, \\ &= \sum_{i=0}^{h} [a_i] x^i + \sum_{i=0}^{k} [b_i] x^i = \pi_n(f) + \pi_n(g) \\ \pi_n(f \cdot g) &= \pi_n\left(\sum_{i=0}^{h+k} (\sum_{j=0}^{i} a_i b_{i-j}) x^i\right) = \sum_{i=0}^{h+k} \left[\sum_{j=0}^{i} a_i b_{i-j}\right] x^i = \sum_{i=0}^{h+k} (\sum_{j=0}^{i} [a_i] \cdot [b_{i-j}]) x^i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{h} [a_i] x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} [b_i] x^i\right) = \pi_n(f) \cdot \pi_n(g), \\ \pi_n(1) &= [1]. \end{aligned}$$

Das zeigt dass π_n ein Ringhomomorphismus ist. Die Abbildung π_n ist auch surjektiv weil jedes Element in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ die Form $\sum_{i=0}^{h} [a_i] x^i = \pi_n\left(\sum_{i=0}^{h} a_i x^i\right)$ hat. Wir müssen zeigen dass $\ker \pi_n = (n)$:

$$\begin{aligned} \ker \pi_n &= \left\{\sum_{i=0}^{h} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{h} [a_i] x^i = 0\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{h} a_i x^i \mid [a_i] = 0 \text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{h} a_i x^i \mid a_i = n \cdot b_i \text{ für } b_i \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{h} n \cdot b_i x^i \mid b_i \in \mathbb{Z}\right\} = \{n \cdot g(x) \mid g(x) \in \mathbb{Z}[x]\} = (n). \end{aligned}$$

(b) Das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ ist prim genau dann, wenn $\mathbb{Z}[x]/(n)$ ein Integritätsbereich ist, und Punkt (a) zusammen mit dem Isomorphiesatz zeigt dass $\mathbb{Z}[x]/(n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$. Wir müssen dann zeigen dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ ein Integritätsbereich ist, genau dann wenn n prim ist. Wenn n prim ist, dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ ist dann ein Integritätsbereich. Wenn n nicht prim ist, dann hat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Nullteilern, die auch Nullteilern in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ sind.

(c) Eine Begrundung wie in Punkt (b) zeigt dass $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ maximal ist, genau dann wenn $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ ein Körper ist, aber $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ ist nicht invertierbar, weil $\deg(x \cdot f(x)) = \deg(f(x)) + 1$ für alle $f(x) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x], f(x) \neq 0$ so dass $x \cdot f(x) \neq 1$.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 5 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring, und $I, J \subseteq R$ zwei Idealen. Wir definieren das Produktideal IJ als

$$IJ := (ij \mid i \in I, j \in J)$$

(a) Zeigen Sie, dass $IJ \subseteq I \cap J$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an in dem $IJ \subsetneq I \cap J$ gilt.

(c) Nehmen wir jetzt an, dass $I + J = R$. Zeigen Sie, dass $IJ = I \cap J$.

Lösung:

(a) Es reicht zu zeigen dass $ij \in I \cap J$ für alle $i \in I, j \in J$. Da I ein Ideal ist, $ir \in I$ für alle $i \in I, r \in R$. Insbesondere $ij \in I$. Eine änliche Begrundung zeigt dass $ij \in J$, so dass $ij \in I \cap J$.

(b) Seien $R = \mathbb{Z}$ und $I = J = (2)$. Dann $I \cap J = (2)$ aber $I \cdot J = (2h \cdot 2k \mid h, k \in \mathbb{Z}) = (4hk \mid h, k \in \mathbb{Z}) = (4)$, so dass $2 \in I \cap J$ und $2 \notin IJ$.

(c) Wir müssen zeigen dass $I \cap J \subseteq IJ$ weil die andere Inklusion haben wir in Punkt (a) gezeigt. Da $I + J = R$, existieren $i_0 \in I, j_0 \in J$ so dass $i_0 + j_0 = 1$. Sei $x \in I \cap J$, dann $x = x \cdot 1 = x \cdot (i_0 + j_0) = x \cdot i_0 + x \cdot j_0$. Da $x \in J$ es folgt dass $xi_0 \in IJ$, und da $x \in I$ es folgt dass $xj_0 \in IJ$. Dann $x \in IJ$ auch.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Seien V, W zwei K-Vektorräume. Seien $x_1, x_2 \in V$ linear unabhängige Vektoren und seien $y_1, y_2 \in W$ so gewählt, dass $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $y_1 = y_2 = 0$.

(b) Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_5 \in V$ und $\alpha \in \wedge^3 V$ definiert als

$$\alpha := 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_3 \wedge v_5 \wedge v_1 - v_4 \wedge v_3 \wedge v_5.$$

Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist.

Lösung:

(a) Wenn y_1, y_2 linear unabhängig sind, dann sind $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2$ auch linear unabhängig so dass die Gleichung $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = 0$ unmöglich ist. Wenn y_1, y_2 linear abhängig aber nicht beide null sind, dann können wir annehmen dass $y_1 \neq 0$ und $y_2 = \lambda y_1$ für $\lambda \in K$. Dann $0 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = (x_1 + \lambda x_2) \otimes y_1$ so dass $x_1 + \lambda x_2 = 0$, aber das ist unmöglich, weil x_1, x_2 linear unabhängig sind. Die einzige Möglichkeit ist dass $y_1 = y_2 = 0$.

(b) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_3 \wedge v_5 \wedge v_1 - v_4 \wedge v_3 \wedge v_5 \\
&= 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_1 \wedge v_3 \wedge v_5 + v_3 \wedge v_4 \wedge v_5 \\
&= (v_1 \wedge 2v_2 - 2v_2 \wedge v_4 - v_1 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_4) \wedge v_5 \\
&= (v_1 \wedge (2v_2 - v_3) + (-2v_2 + v_3) \wedge v_4) \wedge v_5 = (v_1 \wedge (2v_2 - v_3) + v_4 \wedge (2v_2 - v_3)) \wedge v_5 \\
&= (v_1 + v_4) \wedge (2v_2 - v_3) \wedge v_5.
\end{aligned}$$

Das ist eine Zerlegung von α.