UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Nachklausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 25.3.2024

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Art der Prüfüng: ☐ Klausur Algebraische Strukturen, ☐ Test Lineare Algebra II

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
von 10	von 10	von 10	von 10

Klausur Algebraische Strukturen **erreichte Punkte (von 30):** __________ **Note:**

Test Lineare Algebra II **erreichte Punkte (von 40):** __________ **Note:**

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur der Algebraischen Strukturen besteht nur aus den ersten drei Aufgaben, der Test der Linearen Algebra II besteht aus allen vier Aufgaben.
- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Sie können alle Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungsblättern verwenden, sollten sie aber zitieren.
- Wenn eine Übung aus mehreren Teilen besteht, können Sie die Ergebnisse der vorangegangenen Teile für die nachfolgenden Teile verwenden, auch ohne sie zu beweisen.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während der Klausur beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht findet am 26.3.2024 im Raum N16 von 10 Uhr bis 11 Uhr statt.

UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Nachklausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 25.3.2024

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
Führen Sie in beiden Teilaufgaben Polynomdivision für $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ durch: Finden Sie $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$ gilt.

(a) $f = x^6 - 1$ und $g = x^2 + x + 1$.

(b) $f = x^{2024}$ und $g = x^{1012} - 1$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 4 Punkte)
Betrachten Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$.

(a) Schreiben Sie σ als Produkt disjunkter Zykel.

(b) Liegt σ in A_7?

(c) Zeigen Sie, dass S_6 keine zyklische Untergruppe der Ordnung 10 enthält.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Für $b \in R$ definiere $\mathrm{Ann}(b) := \{a \in R : ab = 0\}$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ann}(b)$ ein Ideal von R ist.

(b) Nehmen Sie an, dass R genau zwei Ideale besitzt. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(c) Sei $\phi : S \to R$ ein Ringhomomorphismus und I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(I)$ ein Ideal von S ist.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass $x \otimes y = y \otimes x$ genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Betrachte folgenden Tensor in $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$:

$$\alpha = -2e_3 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 + 2e_2 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_2 \otimes e_2.$$

Zeigen Sie, dass α ein Tensor von Rang 1 ist.