UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
Führen Sie in beiden Teilaufgaben Polynomdivision für $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ durch: Finden Sie $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$ gilt.

(a) $f = x^6 - 1$ und $g = x^2 + x + 1$.

(b) $f = x^{2024}$ und $g = x^{1012} - 1$.

Lösung:

(a) Wir berechnen:

$$
\begin{array}{l}
x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad - 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^4 - x^3 + x - 1\right) \\
\underline{-x^6 - x^5 - x^4} \\
\quad -x^5 - x^4 \\
\quad \underline{\ \ x^5 + x^4 + x^3} \\
\qquad\qquad x^3 \\
\qquad\quad \underline{-x^3 - x^2 - x} \\
\qquad\qquad -x^2 - x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ x^2 + x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

so dass $q = x^4 - x^3 + x - 1$ und $r = 0$.

(b) Sei $y = x^{1012}$. Dann $f = y^2$ und $g = y - 1$. Wir sehen dass $y^2 = (y-1)(y+1) + 1$, so dass $f = g \cdot (x^{1012} + 1) + 1$. Das zeigt dass $q = x^{1012} + 1$ und $r = 1$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 4 Punkte)
Betrachten Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$.

(a) Schreiben Sie σ als Produkt disjunkter Zykel.

(b) Liegt σ in A_7?

(c) Zeigen Sie, dass S_6 keine zyklische Untergruppe der Ordnung 10 enthält.

Lösung:

(a) $\sigma = (15)(26)(374)$.

(b) Wir berechenen das Signum: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((12)(26)(374)) = \operatorname{sgn}((12)) \cdot \operatorname{sgn}((26)) \operatorname{sgn}((374)) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$. Das zeigt dass $\sigma \in A_7$.

(c) Wir zeigen dass S_6 keine Elemente der Ordnung 10 hat. Eine Permutation $\sigma \in S_6$ kann immer als Produkt disjunkter Zykel geschrieben werden: $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$, womit σ_i ein k_i-Zyklus mit $2 \leq k_i \leq 6$ ist. Da die σ_i disjunkt sind, wissen wir dass $\sum k_i \leq 6$. Außerdem, da die σ_i disjunkt sind, gilt das $\operatorname{ord}(\sigma) = kgV(\operatorname{ord}(\sigma_i)) = kgV(k_i)$. Wenn $kgV(k_i) = 10$, dann haben wir zwei Möglichkeiten:

- $k_i = 10$ für ein i. Das ist unmöglich, weil $k_i \leq 6$ für alle i.
- $2|k_i$ und $5|k_j$ für $i \neq j$. Das ist unmöglich, weil dann $k_i + k_j \leq 7$ und wir wissen dass $\sum k_i \leq 6$.

Das zeigt dass $kgV(k_i) = 10$ unmöglich ist, so dass $\text{ord}(\sigma) \neq 10$.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Für $b \in R$ definiere $\text{Ann}(b) := \{a \in R : ab = 0\}$. Beweisen Sie, dass $\text{Ann}(b)$ ein Ideal von R ist.

(b) Nehmen Sie an, dass R genau zwei Ideale besitzt. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(c) Sei $\phi : S \to R$ ein Ringhomomorphismus und I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(I)$ ein Ideal von S ist.

Lösung:

(a) Wir überprüen dass $\text{Ann}(b)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist: wenn $a, a' \in \text{Ann}(b)$, dann $(a+a') \cdot b = a \cdot b + a' \cdot b = 0 + 0 = 0$, und $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = -0 \cdot b = 0$. Das zeigt dass $a + a', -a \in \text{Ann}(b)$. Außerdem, $0 \cdot b = 0$, so dass $0 \in \text{Ann}(b)$. Das zeigt dass $\text{Ann}(b)$ eine Untergruppe ist.

Seien jetzt $x \in R, a \in \text{Ann}(b)$: $(xa) \cdot b = x(a \cdot b) = x \cdot 0 = 0$. Das zeigt dass $xa \in \text{Ann}(b)$, so dass $\text{Ann}(b)$ ein Ideal ist.

(b) R hat immer die zwei Ideale (0) und R. Da R genau zwei Ideale hat, sind diese zwei die einzige Ideale. Wir wollen beweisen dass R ein Körper ist. Aus den Vorlesungen wissen wir, dass es ausreicht, zu zeigen, dass (0) ein maximales Ideal ist. Sei I ein ideal so dass $(0) \subsetneq I$. Dann $I = R$ so dass I kein echtes Ideal ist. Das zeigt dass (0) maximal ist.

(c) Wir überprüen dass $\phi^{-1}(I)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist: wenn $a, a' \in \phi^{-1}(I)$, sodass $\phi(a), \phi(a') \in I$. Dann $\phi(a+a') = \phi(a)+\phi(a') \in I$, und $\phi(-a) = -\phi(a) \in I$, weil I eine Untergruppe ist. Außerdem $\phi(0) = 0 \in I$, so dass $\phi^{-1}(I)$ eine Untegruppe ist.

Seien jetzt $x \in R, a \in \phi^{-1}(I)$: $\phi(xa) = \phi(x)\phi(a) \in I$, weil $\phi(a) \in I$ und I ein Ideal sit. Das zeigt dass $\phi^{-1}(I)$ ein Ideal ist.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass $x \otimes y = y \otimes x$ genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Betrachte folgenden Tensor in $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$:

$$\alpha = -2e_3 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 + 2e_2 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_2 \otimes e_2.$$

Zeigen Sie, dass α ein Tensor von Rang 1 ist.

Lösung:

(a) Wenn x, y linear unabhängig sind, existiert eine Basis $(v_1, v_2, v_3, \dots)$ von V so dass $v_1 = x, v_2 = y$. Wir wissen dann dass $(v_i \otimes v_j)_{i,j \geq 1}$ eine Basis von $V \otimes V$ ist. Insbesondere $x \otimes y = v_1 \otimes v_2 \neq v_2 \otimes v_1 = y \otimes x$.

Wenn x, y linear abängig sind, nehmen wir an dass $\lambda \in K$ existiert so dass $y = \lambda x$. Dann $x \otimes y = x \otimes (\lambda x) = \lambda(x \otimes x) = (\lambda x) \otimes x = y \otimes x$.

(b) Wir darstellen den Tensor α als Matrix:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

und wir sehen das die Matrix nicht null ist und dass zweite Spalte ist das Doppelte der ersten Spalte. Das bedeutet dass $\text{rang}(\alpha) = 1$.