- bildet Gruppen zu zweit oder dritt
- erstes Blatt kommt in der 2. Woche, Abgabe in der 3.
- Allgemein: Im Idealfall habt ihr die Vorlesungen nachbereitet und seid hier um viele Fragen zu stellen. Besonders auch zu Übungsblättern.
- Bei Beweisen auf Übungsblättern: Immer „Voraussetzungen, Z, Beweis" und z.B „□" für das Ende

Beispiele zu Gruppen

Eine Gruppe G ist nicht nur eine Menge, sondern kommt immer mit einer Verknüpfung „$\cdot$": $G \times G \longrightarrow G$

„$\cdot$" ist assoziativ, es gibt eine Identität und ein Inverses.

Die wichtigsten Gruppen:

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ $\rightsquigarrow$ abelsch $\rightsquigarrow$ abelsche Gruppen sind viel einfacher

(2) Die symmetrischen Gruppe, A Menge

$$\Sigma_A = \{ f : A \longrightarrow A \text{ bijektiv} \}$$

Verknüpfung ist Komposition: $f, g \in \Sigma_A$: $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

$\rightsquigarrow$ einfach zu definieren, unfassbar schwer zu verstehen

$$S_n = \Sigma_{\{1,\dots,n\}}$$

a) Schreibweisen für Permutationen

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entspricht $1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zykelschreibweise

k-Zykel $\Rightarrow$ Klasse von Permutationen

Schreibe $(a_1, \dots, a_k)$ für die Permutation in S_n, definiert durch: $(a_1, \dots, a_k)$ k Elemente aus $\{1, \dots, n\}$

- $a_i \mapsto a_{i+1}$
- $a_k \mapsto a_1$
- $j \mapsto j$ falls $j \notin \{a_1, \dots, a_n\}$

Bsp $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4) = (3\ 2\ 4\ 1)$

nicht eindeutig

Jede Permutationen kann als Produkt von Zykeln geschrieben werden, die auf paarweise disjunkten Mengen wirken:

Bsp $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ ✓

$(1\ 2)(2\ 3\ 4)$ ×

Bsp Schreibe $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ in Zykelschreibweise

$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \mapsto 5 \mapsto 4 \mapsto 1$

$\hookrightarrow (1\ 5\ 4)$

$2 \mapsto 3 \mapsto 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Zykel mit einem Element lassen wir weg

(3) Zyklische Gruppen, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \text{Restklassen modulo } n \}$$

Erinnerung $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \equiv b \bmod n \iff n \mid a - b$

$\hookrightarrow$ abelsche Gruppe der Ordnung n mit Verknüpfung „$+$".

Ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, „\cdot")$ eine Gruppe? Nein $[0]$ hat kein Inverses.

Später: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{ [a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid a \text{ teilerfremd zu } n \}$ ist eine Gruppe bzgl. „$\cdot$".

(4) $\mathbb{N}$ ist auch eine Gruppe!

Definiere die folgende Verknüpfung: $\boxplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ Dezimalschreibweise

$a \oplus b$ = Addiere a und b schriftlich ohne Übertrag

$$\begin{array}{r} 123 \\ 091 \\ \hline 114 \end{array}$$

$\hookrightarrow (\mathbb{N}, \boxplus)$ ist eine Gruppe.