

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Wintersemester 2023/24

Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag, 16.01.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Sei $N := (n_{ij}) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix mit $n_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i \geq j$. Zeigen Sie, dass N nilpotent ist und bestimmen Sie eine obere Schranke für den Nilpotenzindex von N .

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Familie von nilpotenten Matrizen

$$A_t := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \text{Mat}(6, \mathbb{C})$$

mit $t \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass alle A_t mit $t \neq 0$ die gleiche Jordannormalform J besitzen, während A_0 eine davon verschiedene Jordannormalform besitzt.

Aufgabe 3

(8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, \mathbb{R})$$

die Jordannormalform und eine Basis bezüglich derer A in Jordannormalform ist.

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Berechnen Sie ohne Computer A^{2023} für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C}).$$

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.