UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2023/24

Blatt 3 Abgabetermin: Dienstag, 14.11.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $d := ggT(3, 29)$ und schreiben Sie d in der Form $d = a \cdot 3 + b \cdot 29$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $[3]^{-1}$ in $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

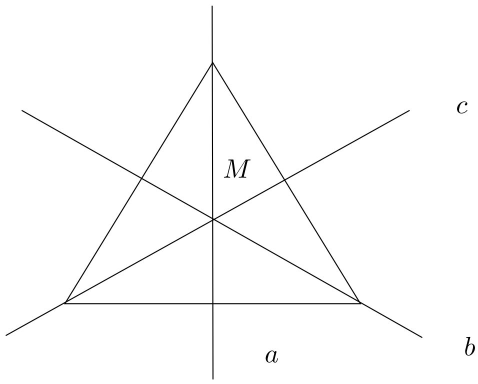
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), x \mapsto 2x - 1$,

(b) $g : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot), x \mapsto 2^x$.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt M. Wir bezeichnen die drei Symmetrieachsen mit a, b, c:



Des Weiteren definieren wir die folgenden Abbildungen in $Sym(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
id &:= id_{\mathbb{R}^2} \\
\sigma_a &:= \text{ Spiegelung an } a \\
\sigma_b &:= \text{ Spiegelung an } b \\
\sigma_c &:= \text{ Spiegelung an } c \\
\delta_1 &:= \text{ Drehung um } M \text{ mit Winkel } 120° \\
\delta_2 &:= \text{ Drehung um } M \text{ mit Winkel } 240°.
\end{aligned}$$

Sei nun G eine Menge $\{id, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \delta_1, \delta_2\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Komposition $\circ : G \times G \to G$ ist eine Abbildung.

(b) $(G, \circ)$ ist eine Gruppe.

Hinweis: Sie wissen aus der Vorlesung bereits, dass die Komposition assoziativ ist. Des Weiteren reicht es aus für die Aussagen über das Ergebnis der Komposition die geometrische Anschauung zu benutzen.

(c) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $d\mathbb{Z}$ für ein $d \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 +2 + 2) = 8 Punkte)

Die *Fibonacci-Folge* ist eine Folge $(a_0, a_1, a_2, ...)$ von ganzen Zahlen, die definiert ist durch:

1. $a_0 := 0$,
2. $a_1 := 1$ und
3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geqslant 2$.

Die Folgenglieder heißen *Fibonacci-Zahlen*.

(a) Bestimmen Sie $ggT(a_{n+1}, a_n)$.

(b) Beweisen Sie die folgende Additionsformel: $a_{n+m} = a_{n-1}a_m + a_n a_{m+1} \forall n, m \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Fibonacci-Zahl a_n ein Teiler von $a_{k \cdot n}$ ist.

(d) Beweisen Sie: $ggT(a_n, a_m) = a_{ggT(n,m)}$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.