

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1  
Wintersemester 2023/24

Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 21.11.2023, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 1**

(2 + 2 + 2 + 3 = 9 Punkte)

Es sei  $\sigma \in \mathbb{S}_{15}$  gegeben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 11 & 9 & 10 & 8 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix}.$$

- (a) Schreiben Sie  $\sigma$  als Produkt von Zykeln, sodass je zwei Zykeln dieser Darstellung kein gemeinsames Element besitzen.
- (b) Schreiben Sie den Zykel  $(3275)$  als Produkt von Nachbartranspositionen
- (c) Schreiben Sie  $\sigma$  als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie  $\text{sign}(\sigma)$ .

Im letzten Aufgabenteil betrachten wir  $\mathbb{S}_3$  und zählen gewisse Tupel von Transpositionen

- (d) Bestimmen Sie die Anzahl von Paaren von Transpositionen  $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{S}_3^2$ , sodass  $\tau_1 \circ \tau_2$  ein 3-Zykel ist.
- 

**Aufgabe 2**

(5 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und  $U \subset G$  eine Untergruppe mit  $|U| = m \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie: Wenn  $U$  die einzige Untergruppe von  $G$  mit  $m$  Elementen ist, dann ist  $U$  Normalteiler.

---

**Aufgabe 3**

(4 + 3 = 7 Punkte)

Es seien  $w := -3 + 5 \cdot i$  und  $z := \sqrt{3} - i$  komplexe Zahlen.

- (a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen (I)  $w + z$ , (II)  $w \cdot z$ , (III)  $\bar{z}$ , (IV)  $\frac{1}{z}$ , (V)  $|z|$  in der Form  $a + b \cdot i$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Skizzieren Sie die Menge  $M := \{a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid (2 \leq a^2 + b^2 \leq 3) \wedge (a \leq 0) \wedge (b \geq 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ .
- 

**Aufgabe 4**

(3 Punkte)

Finden Sie zwei Polynome  $f \neq g$  in  $\mathbb{Z}_2[x]$  vom Grad  $\leq 2$ , sodass die zugehörigen Polynomfunktionen  $f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  und  $g: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  übereinstimmen.

---

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.  
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.