UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2023/24

Blatt 5 Abgabetermin: Dienstag, 28.11.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Seien $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $W := \mathbb{R}^3$ jeweils $\mathbb{R}$-Vektorräume wie in der Vorlesung. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils Untervektorräume sind:

(1) $U_1 := \{f \mid f(1) = 0\} \subset V$,

(2) $U_1 := \{f \mid f(1) = 2\} \subset V$,

(3) $U_3 := \{f \mid f(1) \cdot f(2) = 0\} \subset V$,

(4) $U_4 := \{\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + 7\lambda_3 \\ \lambda_3 + \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \subset W$,

(5) $U_5 := \{\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - \mu^5 \\ \lambda - \mu^5 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset W$,

(6) $U_6 := \{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in W \mid 7\lambda_1 + 3\lambda_2 - \sqrt{5}\lambda_3 = 0\} \subset W$.

(7) $U_7 := \{f \mid f(x) = f(-x)\, \forall x \in \mathbb{R}\} \subset V$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen?

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3y \\ y - x \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -3x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x + y \\ 5x + 3 \end{pmatrix}$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{g \mid g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R},\ g \mapsto g(3)$

Aufgabe 3 (3+3+1+4=11 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei B_V eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(B_V)$ linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $f(B_V)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $f(B_V)$ eine Basis von W ist.

Seien nun V, W zusätzlich endlich dimensional von gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 4 **(4+1=5 Punkte)**

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig sind, wenn $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$ mit $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ existieren, sodass die folgende Gleichheit gilt

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j v_j. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wie in (a) nicht jeder Vektor v_i durch die anderen wie in (1) dargestellt werden kann. Finden Sie dazu 3 Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, die linear abhängig sind, aber $v_1 \neq \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ für alle Wahlen von $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.