

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Wintersemester 2023/24

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 05.12.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1

(4+3=7 Punkte)

Sei \mathbb{K} ein Körper. Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume von gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$ gilt und folgern Sie:
 $\dim_{\mathbb{K}}(U) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \Leftrightarrow U = V$.
- (b) Gilt in Teil (a) die Äquivalenz $\dim_{\mathbb{K}}(U) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \Leftrightarrow U = V$ auch, falls $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$?

Aufgabe 2

(3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Im \mathbb{R}^4 seien $B := \left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ und $U := \langle B \rangle$ der von B erzeugte Vektorraum.

- (a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von U ist.

Wir definieren nun die Vektoren $x := \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

- (b) Welche der drei Vektoren x, y und z liegen in U ?
- (c) Ersetzen Sie in der Basis B mithilfe des Steinitzschen Austauschsatzes möglichst viele Vektoren durch Vektoren aus $\{x, y, z\}$.

Aufgabe 3

(2+3+1+2=8 Punkte)

Sei \mathbb{K} ein Körper. Sie wissen aus der Vorlesung, dass $\mathbb{K}[x]$, der Raum der Polynome über \mathbb{K} , ein \mathbb{K} -Vektorraum ist. Die Mengen

$$U := \{f \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(f) \leq 1\}$$

$$V := \{f \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(f) \leq 3\}$$

sind Untervektorräume von $\mathbb{K}[x]$ mit $U \subset V$.

- (a) Zeigen Sie, dass $(1, x)$ eine Basis von U und $(1, x, x^2, x^3)$ eine Basis von V ist.

Betrachten Sie nun den Faktorraum V/U .

- (b) Zeigen Sie, dass für $f := \sum_{i=0}^3 a_i x^i$ und $g := \sum_{i=0}^3 b_i x^i$ gilt: $[f] = [g]$ in $V/U \Leftrightarrow a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3$.
- (c) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{K}}(V/U)$.
- (d) Bestimmen Sie eine Basis von V/U .

Aufgabe 4**(3 Punkte)**

Sei \mathbb{K} ein Körper und $f, g \neq 0$ zwei Polynome aus $\mathbb{K}[x]$ von unterschiedlichem Grad. Zeigen Sie, dass f und g linear unabhängig sind.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.