

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Wintersemester 2023/24

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 12.12.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1

(2+2+2=6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}) \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie jeweils $\text{rang}(A)$, $\text{rang}(B)$ und $\text{rang}(A \cdot B)$.

Aufgabe 2

(3+3=6 Punkte)

Sei \mathbb{K} ein Körper. Gegeben sei die \mathbb{K} -lineare Abbildung:

$$f : \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{21} + a_{32} \\ a_{31} + a_{12} \end{pmatrix}$$

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2\}$ sei $E_{ij} \in \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{K})$ die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Dann ist $B := \{E_{ij} \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}\}$ eine Basis von $\text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{K})$. Sei außerdem $C := \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von \mathbb{K}^3 .

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B M_C(f)$ von f bezüglich der Basen B und C .
- Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Ker}(f)$ und $\text{Im}(f)$.

Aufgabe 3

(4 + 2 = 6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt

- symmetrisch* : $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} = a_{ji}$.
- alternierend* : $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} = -a_{ji}$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\text{Sym}(n)$ die Menge der symmetrischen bzw. mit $\text{Alt}(n)$ die Menge der alternierenden Matrizen. Diese sind beide Untervektorräume von $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

- Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Sym}(n)$ und $\text{Alt}(n)$.
- Zeigen Sie: $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) = \text{Sym}(n) \oplus \text{Alt}(n)$.

Aufgabe 4

(2+3=5 Punkte)

Sei E die Standardbasis des \mathbb{R}^2 und sei $B := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis des \mathbb{R}^2 .

- Bestimmen Sie die Matrix ${}_E T_B$, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$${}_E M_E(f) := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix ${}_E M_B(f)$.

**Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.**