UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2023/24

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 12.12.2023, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}) \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie jeweils $rang(A)$, $rang(B)$ und $rang(A \cdot B)$.

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Gegeben sei die $\mathbb{K}-$lineare Abbildung:

$$f : \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{21} + a_{32} \\ a_{31} + a_{12} \end{pmatrix}$$

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2\}$ sei $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{K})$ die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Dann ist $B := \{E_{ij} \,|\, i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}\}$ eine Basis von $\mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{K})$. Sei außerdem $C := \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_BM_C(f)$ von f bezüglich der Basen B und C.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $Ker(f)$ und $Im(f)$.

Aufgabe 3 (4 + 2= 6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt

- *symmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, ..., n\} : \; a_{ij} = a_{ji}$.
- *alternierend* $:\Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, ..., n\} : \; a_{ij} = -a_{ji}$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $Sym(n)$ die Menge der symmetrischen bzw. mit $Alt(n)$ die Menge der alternierenden Matrizen. Diese sind beide Untervektorräume von $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von $Sym(n)$ und $Alt(n)$.

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) = Sym(n) \bigoplus Alt(n)$.

Aufgabe 4 (2+3=5 Punkte)

Sei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei $B := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_ET_B$, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$ {}_EM_E(f) := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. $$

Bestimmen Sie die Matrix ${}_EM_B(f)$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.