UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2023/24

Blatt 9 Abgabetermin: Dienstag, 09.01.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3+1=6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ eine Matrix. Vergewissern Sie sich, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{K}[x]$ von A Grad n hat und zeigen Sie, dass in χ_A

(a) der Koeffizient von x^n gleich $(-1)^n$,

(b) der Koeffizient von x^{n-1} gleich $(-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ und

(c) der Koeffizient von x^0 gleich $\det(A)$ ist.

Aufgabe 2 (2+2+2+0*=6 Punkte)

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$$

gegeben. Sei außerdem die Determinante $\det(A)$ nicht Null.

(a) Berechnen Sie die Adjunkte $A^{\#}$ von A.

(b) Berechnen Sie A^{-1} und $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

(d*) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit ihrer Mitschrift aus der ersten Vorlesung der linearen Algebra 1.

(*Hinweis: Bei (d) ist keine schriftliche Antwort verlangt.*)

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -28 \\ 0 & 1 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$$

gegeben. Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, finden Sie eine Diagonalmatrix A', die konjugiert zu A ist und ein $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, sodass $TAT^{-1} = A'$ gilt. Ist A' eindeutig?

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für ein $n-$Tupel reeller Zahlen $(x_1, ..., x_n)$ ist die Vandermonde-Matrix V definiert durch:

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $det(V) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ gilt. Für welche Zahlen $(x_1, ..., x_n)$ ist V invertierbar?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^k - y^k}{x - y} = \sum_{i=1}^{k} x^{k-i} y^{i-1}.$$

gilt.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.