Geometrie

Daniele Agostini

4. Februar 2025

Vorwort

Dieses Skript ist noch in Arbeit. Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Die mit ($\star$) gekennzeichneten Teile sind fortgeschrittene Kommentare und nicht Bestandteil der Vorlesungen.

Hinweis fürs Lernen: Mathematik kann man nur lernen, indem man sie tut, und nicht nur durch Lesen oder Zuhören von Vorlesungen. Das heißt, auch wenn es natürlich notwendig ist, die Beweise zu lesen und sie zu verstehen, findet das eigentliche Lernen statt, wenn man versucht, den Beweis selbst zu wiederholen.

Die nützlichste Technik, die ich kenne, um die Theorie zu lernen, ist folgende: nachdem man die Theoreme und Bemerkungen aus dem Skript oder den Notizen gelesen hat, versucht man, den Beweis auf einem weißen Blatt Papier (oder auf einer Tafel,...) zu wiederholen, ohne dabei auf das Skript oder die Notizen zu schauen. Das Gleiche gilt für die Übungen und die Beispiele, die im Unterricht oder in den Notizen besprochen wurden, oder für die Übungsblätter.

Sie können das Ganze noch effektiver gestalten, wenn Sie es gemeinsam mit jemandem machen: Anstatt den Beweis nur für sich selbst umzuschreiben, versuchen Sie, ihn vor einer anderen Person zu machen und ihr alle Schritte zu erklären (die andere Person kann gerne Fragen stellen). Dann kann die andere Person Ihnen etwas anderes erklären.

Wichtig ist auch, dass Sie dabei die Aussagen, Beweise und Lösungen so genau wie möglich aufschreiben. Ich finde es hilfreich, ganze grammatikalisch korrekte Sätze zu schreiben.

Was ich oben geschrieben habe, bezieht sich auf eine Studienmethode, und ich denke, es gilt auch für viele andere Fächer. Ein weiterer Tipp, der sich vielleicht eher auf die Mathematik bezieht, ist folgender: Wenn Sie eine Aussage und ihren Beweis lernen, versuchen Sie zu verstehen, wo jede der Hypothesen verwendet wird, und fragen Sie sich, ob die Hypothesen wirklich notwendig sind. Eine gute Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, Gegenbeispiele zu finden, wenn eine der Hypothesen fallen gelassen wird.

Das ist natürlich sehr zeitaufwändig, und da Mathematik ein recht dichtes Thema ist, dauert es nicht selten sehr lange, ein paar Seiten des Skripts auf diese Weise durchzugehen. Nach einer Weile werden Sie jedoch feststellen, dass dies einfacher (und etwas weniger zeitaufwendig) wird, und Sie werden vielleicht selbst auf Beweise oder Lösungen kommen, die sich von denen unterscheiden, die wir im Unterricht besprochen haben.

Viel Erfolg!

Inhaltsverzeichnis

1 Affine Geometrie **3**
1.1 Die affine Ebene . . . 3
1.1.1 Affine Transformationen . . . 9
1.1.2 Die affine Ebene über anderen Körpern . . . 14
1.2 Affine Räume . . . 15
1.2.1 Beschreibungen eines affinen Unterraums . . . 17
1.2.2 Schnittmenge und affine Hülle . . . 21
1.2.3 Lineare allgemeine Lage . . . 26
1.3 Affine Abbildungen . . . 27
1.3.1 Von der affinen Geometrie zur linearen Algebra . . . 32
1.4 Affine Geometrie in euklidischen Räumen . . . 34
1.4.1 Orthogonalität und Abstand zwischen affine Unterräume . . . 35
1.4.2 Isometrien . . . 39
1.4.3 Volumen . . . 44

2 Projektive Geometrie **48**
2.1 Der projektive Raum . . . 48
2.2 Projektive Unterräume . . . 49
2.3 Affine Karten und Fernelemente . . . 52
2.4 Projektive Abbildungen . . . 56
2.4.1 Projektive Transformationen und affine Transformationen . . . 58
2.4.2 Punkte in linearer allgemeiner Lage . . . 59
2.4.3 Möbiustransformationen und das Doppelverhältnis . . . 62
2.5 Ebene projektive Geometrie . . . 68
2.6 Die reelle Geometrie der komplexen Gerade . . . 71
2.6.1 Die reelle Geometrie der affinen komplexen Gerade . . . 71
2.6.2 Die reelle Geometrie der projektiven komplexen Gerade . . . 75
2.6.3 Orthogonale verallgemeinerte Kreise . . . 79

3 Hyperbolische Geometrie **85**
3.1 Axiomatische Geometrie: Inzidenzgeometrie . . . 85
3.2 Die Hyperbolische Ebene . . . 88
3.3 Hyperbolische Abstand . . . 94

Kapitel 1

Affine Geometrie

1.1 Die affine Ebene

Definition 1.1.1 (Affine Ebene)**.** Die affine Ebene is die Menge $\mathbb{R}^2$.

Elementen in $\mathbb{R}^2$ sind Spaltenvektoren $\binom{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Manchmal schreiben wir auch $(x\, y)^t$, und auch wenn dass nicht korrekt ist, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Aber wir sollen immer im Kopf behalten dass die Elementen in $\mathbb{R}^2$ Spaltenvektoren sind (und nicht Zeilenvektoren).

Definition 1.1.2 (Punkten und Geraden)**.** Ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist einfach ein $P \in \mathbb{R}^2$. Eine Gerade ist eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^2$ so dass

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

für manche $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq 0$. Manchmal werden wir einfach

$$L = \{ax + by + c = 0\}$$

schreiben. Wenn P ein Punkt und L eine Linie ist, so dass $P \in L$, sagt man auch, dass L durch P geht oder dass P auf L liegt.

Beispiel 1.1.3. Man sollte die Geraden $\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{y = 1\}$ und $\{x + y = 2\}$ an der Tafel skizzieren.

Lemma 1.1.4. *Die folgende sind äquivalent:*

1. *Geraden $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch 0 gehen.*
2. *Geraden $L \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Gleichung $L = \{ax + by = 0\}$.*
3. *Untervektorräume $L \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Dimension 1.*

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade, die durch 0 geht. Dann $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$. Das bedeutet dass $L = \{ax + by = 0\}$.

(2) $\implies$ (3): Sei $L = \{ax + by = 0\}$, mit $(a, b) \neq 0$. Wir betrachten die Matrix $(ab) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ und wir sehen dass $L = \operatorname{Ker}(ab)$. Das zeigt dass L ein Untervektorraum ist. Außerdem, hat die Matrix Rang 1 (weil die Matrix nicht null ist) so dass $\dim L = \dim \operatorname{Ker}(ab) = 2 - \operatorname{Rang}(ab) = 2 - 1 = 1$.

(3) $\implies$ (1): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum mit $\dim U = 1$. Sei $v_0 = (x_0, y_0) \in U$, $v_0 \neq 0$. Dann ist v_0 eine Basis von U, weil U Dimension 1 hat:

$$U = \{(t \cdot x_0, t \cdot y_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Wir wollen zeigen dass

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0\}$$

Wenn $(t \cdot x_0, t \cdot y_0) \in U$, dann $y_0(t \cdot x_0) - x_0 \cdot (t \cdot y_0) = t \cdot x_0 y_0 - t \cdot x_0 y_0 = 0$. Andererseits, sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ so dass $y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0$. Das bedeutet $y_0 \cdot x = x_0 \cdot y$ und wir wissen auch dass $x_0 \neq 0$ oder $y_0 \neq 0$. Nehmen wir an, dass $x_0 \neq 0$: dann $y = \frac{y_0 \cdot x}{x_0}$, so dass

$$(x, y) = (x, \frac{x}{x_0} \cdot y_0) = (\frac{x}{x_0} \cdot x_0, \frac{x}{x_0} \cdot y_0) \in U$$

. □

In der affinen Ebene haben wir Translationen

Definition 1.1.5 (Translation oder Parallelverschiebung)**.** Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Die Translation durch v ist die Abbildung

$$t_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \mapsto P + v$$

Wenn $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge ist, schreiben wir

$$X + v = t_v(X) = \{P + v \mid P \in X\}$$

Bemerkung 1.1.6. ($\star$) Man sieht leicht dass:

1. $t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$
2. $t_v \circ t_u = t_{v+u}$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Das bedeutet, dass die Translationen eine Operation der additiven Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ auf die Menge $\mathbb{R}^2$ ergeben. Insbesondere sind alle Translationen invertierbar und

$$t_v^{-1} = t_{-v} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2$$

Diese Gruppenoperation hat auch zusatzliche Eigenschaften:

1. $t_v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ genau dann, wenn $v = 0$.
2. für zwei beliebige Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ existiert $v \in \mathbb{R}^2$ so dass $P = t_v(Q) = Q + v$.

Dies bedeutet, dass die Operation frei und transitiv ist.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 15.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Lemma 1.1.7. *Sei $L = \{ax + by + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade.*

1. *Eine Translation von L ist eine Gerade: sei $v = (v_x \ v_y)^t \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, dann*

$$L + v = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) + c = 0\} = \{ax + by + (c - ax_v - by_v) = 0\}$$

2. *Es gibt eine einzige gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch 0 so dass L eine Translation von L_0 ist: $L = L_0 + v$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$. Diese Gerade ist*

$$L_0 = \{ax + by = 0\}$$

3. *Es gilt dass $L = L_0 + v$ genau dann, wenn $v \in L$.*

Beweis. 1. Wir sehen dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L + v \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v \in L \iff \begin{pmatrix} x - x_v \\ y - y_v \end{pmatrix} \in L \iff a(x - x_v) + b(y - y_v) + c = 0$$

und das ist genau was wir zeigen wollten.

2. Wir zeigen zuerst dass L nicht leer ist. Ein Punkt in L ist eine Lösung des lineares Gleichungssytems $(a\, b)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -c$. Da die Matrix $(a\, b)$ Rang 1 hat. Hat diese System immer eine Lösung. Sei denn $v = \left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right) \in L$: das bedeutet dass $ax_v + by_v + c = 0$, oder $c = -azx_v - by_v$. Sei $L_0 = \{ax + by = 0\}$. Wir zeigen dass $L = L_0 + v$, mit Punkt (1):

$$L_0 + v = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) = 0\} = \{ax + by + (-ax_v - by_v) = 0\} = \{ax + by + c = 0\} = L$$

Sei nun $L_0' \subseteq \mathbb{R}^2$ eine andere Gerade durch 0 so dass $L = L_0' + v'$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$. Da L_0' eine Translation von L ist, sehen wir dass $L_0' = \{ax + by + c' = 0\}$ (die a, b Koeffizienten sind die selbe von L), und da L_0' durch 0 geht, sehen wir dass $c' = 0$. Dann $L_0 = L_0'$.

3. Wenn $v \in L$, haben wir schon gezeigt dass $L = L_0 + v$. Andererseits, wenn $L = L_0 + v$, dann $v = 0 + v \in L$, da $0 \in L_0$.

□

Definition 1.1.8 (Untervektorraum einer Gerade)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Die einzige Gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch 0 so dass L eine Translation von L_0 ist, ist der zu L assoziierte Untervektorraum oder die zu L_0 assoziierte Gerade durch 0.

Bemerkung 1.1.9. Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Die assoziierte Gerade durch 0 ist eindeutig. Die Translation so dass $L = L_0 + v$ ist aber nicht eindeutig: alle $v \in L$ sind gut. Zum Beispiel, man soll die Geraden $L = \{x + 2y = 2\}, L_0 = \{x + 2y = 0\}$ skizzieren, und sehen dass

$$L = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$$

Bemerkung 1.1.10 (Beschreibung einer Gerade durch Gleichungen oder durch eine Parametrisierung)**.** Wir haben gesehen dass jede Gerade eine Translation einer Gerade durch 0 ist. Jede Gerade durch 0 ist auch ein Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Dimension 1, und so ein Untervektorraum hat zwei Darstellungen:

- **Gleichungen:** $L_0 = \{ax + by = 0\}$ mit $(a, b) \neq 0$
- **Parametrisierung:** $L_0 = \{(tx_0, ty_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann hat auch jede Gerade $L = L_0 + v$, mit $v = (v_x, v_y)$ zwei Darstellungen:

- **Gleichungen:** $L = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) = 0\} = \{ax + by + c = 0\}$ für $(a, b) \neq 0$.

- **Parametrisierung:** $L = \{(tx_0 + v_x, ty_0 + v_y) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $(x_0, y_0) \neq 0$

Beispiel 1.1.11. Zum Beispiel nehmen wir die Gerade $L = \{3x + 5y - 8 = 0\}$. Wir wollen eine Parametrisierung von L finden. Die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{3x + 5y = 0\}$ und sie hat eine Parametrisierung $L_0 = \{(5t, -3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir sehen auch dass $(1, 1) \in L$, so dass $L = L_0 + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \{(5t + 1, -3t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Andererseits, betrachten wir die Gerade $L = \{(t-2, t+2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir wollen eine Gleichung für L finden. Die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und diese hat Gleichung $L_0 = \{x - y = 0\}$. Dann hat L Gleichung $L = \{x - y + c = 0\}$. Um c zu finden, sehen wir dass $(0 - 2, 0 + 2) = (-2, 2) \in L$, so dass $-2 - 2 + c = 0$. Das bedeutet dass $c = 4$, so dass $L = \{x - y + 4 = 0\}$.

Definition 1.1.12 (Parallele Geraden)**.** Zwei Geraden sind parallel wenn sie denselben assoziierten Untervektorraum (oder Gerade durch 0) haben.

Proposition 1.1.13. *Seien $L, L' \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden.*

1. *L, L' sind parallel genau dann, wenn eine eine Translation der anderen ist: $L' = L + v$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$.*

2. *$L, L' \subseteq \mathbb{R}^2$ sind parallel genau dann, wenn sie entweder gleich oder disjunkt sind: entweder $L = L'$ oder $L \cap L' = \emptyset$.*

Beweis. 1. ($\Longrightarrow$) Wenn L, L' parallel sind, dann haben sie dieselbe assoziierte Gerade durch 0. Sei L_0 diese Gerade, dann $L = L_0 + w$ und $L' = L_0 + w'$ für Vektoren $w, w' \in \mathbb{R}^2$. Dann $L' = L_0 + w' = (L - w) + w' = L + (w' - w)$ so dass L' eine Translation von L ist.

($\Longleftarrow$) wenn $L' = L + v$ für ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, sei L_0 die Gerade durch 0 die assoziierte zu L ist und sei $w \in L$. Dann $L = L_0 + w$ so dass $L' = L + v = L_0 + w + v = L_0 + (w + v)$. Das zeigt dass L_0 auch die Gerade assoziierte zu L' ist, so dass L und L' parallel sind.

2. ($\Longrightarrow$) Seien L, L' zwei parallele Geraden und sei $L_0 = \{ax + by = 0\}$ die Gerade durch 0 die zu L, L' assoziert ist. Dann haben L und L' Gleichungen der Form $L = \{ax+by+c = 0\}$ und $L' = \{ax + by + c' = 0\}$ für $c, c' \in \mathbb{R}$. Wenn $c = c'$, dann $L = L'$. Andererseits, wenn $c \neq c'$, wollen wir zeigen dass $L \cap L' = \emptyset$. Sei $(x, y) \in L \cap L'$: dann $ax+by+c = 0 = ax+by+c'$ so dass $c = c'$, Widerspruch.

Wir können auch geometrisch denken: nehmen wir an dass L, L' parallel sind und dass $L \cap L' \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen dass $L = L'$. Sei $v \in L \cap L'$ und sei $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ der assoziierter Untervektorraum zu beide L und L'. Da $v \in L$, wissen wir dass $L = L_0 + v$ und da $v \in L'$, wissen wir dass $L' = L_0 + v$. Das zeigt dass $L = L'$.

($\Longleftarrow$) Wenn $L = L'$ dann haben L, L' die selbe assoziierte Gerade durch 0. Nehmen wir an dass $L \cap L' = \emptyset$. Wir wollen zeigen dass L, L' parallel sind: wir schreiben $L = \{ax + by + c = 0\}$ und $L' = \{a'x + b'y + c' = 0\}$, und die Annahme $L \cap L' = \emptyset$ bedeutet dass das System

$$\begin{cases} ax + by & = -c \\ a'x + b'y & = -c' \end{cases}$$

keine Lösung hat. Insbesondere, es muss sein dass

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

und das bedeutet dass die Zeilen von der Matrix linear abhängig sind. Da beide Zeilen von der Matrix nicht null sind (Warum?), wissen wir denn, dass $(a', b') = (\lambda a, \lambda b)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten jetzt die Graden L_0, L_0' durch 0 die assoziierte zu L, L' sind. Wir wissen dass $L_0 = \{ax + by = 0\}$ und $L_0' = \{a'x + b'y = 0\} = \{\lambda ax + \lambda by = 0\}$, so dass

$$L_0' = \{(x, y) \mid \lambda ax + \lambda by = 0\} = \{(x, y) \mid \lambda(ax + by) = 0\} = \{(x, y) \mid ax + by = 0\} = L_0$$

Das zeigt dass L, L' parallel sind.

□

Definition 1.1.14 (Inzidenz)**.** Zwei Geraden L, L' sind inzident wenn L und L' nicht disjunkt sind: $L \cap L' = \emptyset$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 17.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Bemerkung 1.1.15. Proposition 1.1.13 zeigt dass zwei verschiedene Geraden L, L' sind enweder parallel oder inzident. Wir sehen auch dass zwei gleiche Geraden L, L' sind gleichzeitig parallel und inzident.

Wir zeigen nun, dass Punkte und Geraden einige natürliche Eigenschaften erfüllen:

Satz 1.1.16. *1. Für zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine einzige Gerade, die durch P, Q geht.*

2. Jede Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ enthält mindestens zwei verschiedene Punkte P, Q.

3. Es gibt drei nicht-kollineare Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$: d.h. dass P, Q, R nicht auf eine Gerade liegen.

4. Seien L eine Gerade und P ein Punkt so dass $P \notin L$. Dann existiert eine einzige Gerade L' durch P so dass $L \cap L' = \emptyset$.

Beweis. 1. Wir geben zuerst einen "algebraischen" Beweis. Seien $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ die zwei Punkte. Eine Gerade $L = \{ax + by + c = 0\}$ geht durch beide P, Q genau dann, wenn

$$\begin{cases} ax_P + by_P + c &= 0 \\ ax_Q + by_Q + c &= 0 \end{cases}$$

Wir können das als lineares System schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

und wir wollen eine Lösung finden, mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Wir sehen dass die Matrix Rang 2 hat: sonst sind die Zeilenvektoren linear abhängig, so dass $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda \cdot (x_P \ y_P \ 1) = (x_Q \ y_Q \ 1)$$

aber das bedeutet $\lambda = 1$, und dann $x_P = x_Q$ und $y_P = y_Q$. Das ist ein Widerspruch weil $P \neq Q$. Da die Matrix Rang 2 hat, wissen wir dass der Kern dimension 1 hat, so dass $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3, (a_0, b_0, c_0) \neq 0$ existiert, so dass alle Lösungen des Systems die Form

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_0 \\ \lambda \cdot b_0 \\ \lambda \cdot c_0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

haben. Insbesondere, sehen wir dass $(a_0 b_0) \neq 0$, sonst zeigt das lineares System dass $c_0 = 0$ auch, so dass $(a_0, b_0, c_0) = 0$. Am Ende dieser Diskussion, haben wir eine Gerade $L = \{a_0 x + b_0 y + c_0 = 0\}$ gefunden so dass $P, Q \in L$. Sei nun L' eine andere Gerade so dass $P, Q \in L'$. Die Diskussion zeigt dass L' die Form $L' = \{\lambda \cdot a_0 x + \lambda \cdot b_0 y + \lambda \cdot c_0 = 0\}$ hat, für ein $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ (Warum gilt $\lambda \neq 0$?). Dann $L' = L$, so dass es gibt eine einzige Gerade die durch P, Q geht.

Wir können auch einen "geometrischen" Beweis geben: seien $P, Q \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Mit Hilfe von Translationen sehen wir dass Geraden durch P, Q den Geraden durch 0 und $Q - P$ entsprechen: wenn L eine Gerade durch P, Q ist, dann ist $L - Q$ eine Gerade durch 0 und $Q - P$. Wir müssen nun zeigen dass eine einzige Gerade durch 0 und $v = Q - P$ existiert. So eine Gerade ist ein eindimensionaler Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, der v enthält. Dieser Untervektorraum ist eindeutig: er ist der Untervektoraum erzeugt von v: $L_0 = \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ (Wo haben wir benutzt dass $P \neq Q$?).

2. Sei L eine Gerade und sei L_0 die assoziierte Gerade durch 0. Wir wissen dass L eine Translation von L_0 ist, so dass L mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, genau dann wenn, dasselbe für L_0 gilt. Wir können annehmen dass L_0 eine Gerade durch 0 ist. Das bedeutet dass L_0 ein Untervektorraum mit Dimension 1 ist, so dass L_0 enthält $0 \in L_0$ und ein $v \in L_0, v \neq 0$.

3. Wir betrachten die drei Puntke $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Wir zeigen dass diese drei Punkte nicht kollinear sind.

   Wir geben zuerst einen "algebraischen" Beweis: sei $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade die alle drei Punkte enthält. Dann

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a + c &= 0 \\ b + c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

   und das ist ein Widerspruch, weil dann L keine Gerade ist.

   Wir können auch einen "geometrischen" Beweis geben: sei L eine Gerade die alle drei Punkte enthält. Da L durch 0 geht, muss L ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ sein. Da aber L zwei lineare unabhängige Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ enthält, muss $\dim L \geq 2$, Widerspruch.

4. Wir geben zuerst ein "algebraischen" Beweis. Seien $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade, und $P = (x_P, y_P)$ ein Punkt so dass $P \notin L$. Sei L' eine andere Gerade. Wir sehen dass $L \cap L' = \emptyset$ genau dann, wenn L' parallel zu L ist. Wir mussen also zeigen dass eine einzige Gerade L' durch P existiert, die parallel zu L ist. Die Gerade L' ist parallel zu L genau

dann, wenn $L' = \{ax + by + c' = 0\}$ für ein $c' \in \mathbb{R}$. Außerdem $P \in L'$ genau dann, wenn $c' = -ax_P - by_P$, so dass c' eindeutig bestimmt ist.

Wir können auch ein "geometrischen" Beweis geben. Wie im müssen wir zeigen, dass es eine einzige Gerade L' parallel zu L gibt, die durch P geht. Sei $Q \in L$ und sei $L' = L + (P - Q)$: wir sehen dass L' parallel zu L ist und dass $P = Q + (P - Q) \in L'$. Sei L'' eine andere Gerade durch P, die parallel zu L ist. Dann sind L', L'' parallel und inzident, so dass $L' = L''$.

□

Definition 1.1.17 (Gerade erzeugt von zwei Punkte)**.** Seien $P, Q \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Die einzige Gerade die durch P, Q geht nennen wir die Gerade die von P und Q erzeugt ist und bezeichnen wir sie mit $L(P, Q)$.

Eine Gerade durch zwei Punkte hat eine einfache Parametrisierung:

Proposition 1.1.18. *Seien $P, Q \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Punkte. Die Gerade $L(P, Q)$ hat eine Parametrisierung*

$$L(P, Q) = \{tP + (1 - t)Q \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Beweis. Die Menge $L = \{tP + (1 - t)Q \mid t \in \mathbb{R}\}$ enthält P (für $t = 1$) und Q (für $t = 0$). Wir müssen zeigen dass L eine Gerade ist. Wir sehen dass $L = \{t(P - Q) + Q \mid t \in \mathbb{R}\}$ und das ist eine Gerade, weil $P - Q \neq 0$. □

Bemerkung 1.1.19. Eine wichtige Konsequenz des Satzes 1.1.16 ist, dass zwei Geraden, die sich in mindestens zwei Punkten treffen, dieselben sein müssen, weil sie beide mit der einzigen Linie übereinstimmen müssen, die durch diese Punkte geht.

1.1.1 Affine Transformationen

Wir haben Translationen eingeführt und benutzt, z.B. im Beweis des Satzes 1.1.16. Translationen sind ein besonderes Fall von affine Transformationen

Definition 1.1.20 (Affine Transformationen)**.** Eine affine Transformation oder Affinität auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung

$$f_{A,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad P \mapsto AP + v$$

mit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ eine invertierbare 2×2 Matrix und $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Wir bezeichnen die Menge aller affine Transformationen als $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Bemerkung 1.1.21. Wir können eine affine Transformation auch explizit schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad f \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + v_x \\ cx + dy + v_y \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.22. Translationen $t_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v$ sind affine Transformationen mit Matrix $A = I_2$. Lineare transformationen (d.h. invertierbare lineare Abbildungen) $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ sind auch affine Transformationen mit Vektor $v = 0$. Eigentlich, sehen wir dass eine affine Transformation die Komposition einer invertierbare lineare Abbildung mit einer Translation ist: $f_{A,b} = t_v \circ A$ Insbesondere ist die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ eine affine Transformation $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = f_{I_2,0}$.

Lemma 1.1.23. *1. Die Komposition zweier affine Transformationen ist eine affine Transformation: seien $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$. Dann*

$$f_{A,v} \circ f_{B,w} = f_{AB,Aw+v}$$

2. Affine Transformationen sind invertierbar: seien $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$f_{A,v}^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}v}$$

3. Die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ aller affine Transformationen ist eine Gruppe mit der Komposition.

Beweis. 1. Wir berechnen

$$(f_{A,v} \circ f_{B,w})(P) = f_{A,v}(B \cdot P + w) = A(B \cdot P + w) + v = ABx + (Aw + v)$$

2. Punkt (1) zeigt dass

$$f_{A,v} \circ f_{A^{-1},-A^{-1}v} = f_{AA^{-1},A(-A^{-1}v)+v} = f_{I_2,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$$

und eine ähnliche Berechnung zeigt dass $f_{A^{-1},-A^{-1}v} \circ f_{A,v} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

3. Das folgt aus (1) und (2).

□

Bemerkung 1.1.24. ($\star$) Wir können auch die Struktur von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ als Gruppe durch die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$ und die additive Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ verstehen: es gibt ein surjektives Homomorphismus von Gruppen

$$\varphi\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \to GL_2(\mathbb{R}), \qquad f_{A,v} \mapsto A$$

Der Kern dieses Homomorphismus ist die Untergruppe von Translationen $\{t_v = f_{I_2,v} \mid v \in \mathbb{R}^2\}$. Diese Untergruppe ist das Bild des injektives Homomorphismus

$$\mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), \qquad v \mapsto t_v$$

Es gibt also eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \to \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\phi} GL_2(\mathbb{R}) \to 1$$

Außerdem, haben wir auch ein Homomorphismus $\psi\colon GL_2(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), A \mapsto f_{A,0}$. Als Konsequenz, sehen wir dass die Gruppe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ein semidirektes Produkt ist:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{R})$$

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 22.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Affine Transformationen lassen die geometrische Eigenschaften dass wir gesehen haben unverändert:

Proposition 1.1.25. *1. Eine affine Transformation verwandelt Geraden in Geraden: sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine affine Transformation und sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann ist $f(L)$ auch eine Gerade.*

2. *Eine affine Transformation verwandelt parallele (bzw. inzidente) Geraden in parallele (bzw. inzidente) Geraden: sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine affine Transformation und seien $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden. Wenn L_1, L_2 parallel (bzw. inzident) sind, dann sind $f(L_1), f(L_2)$ auch parallel (bzw. inzident).*

Beweis. 1. Eine affine Transformation ist der Komposition einer linearen Transformation mit einer Translation. Wir wissen schon dass die Translation einer Gerade wieder eine Gerade ist, mir müssen denn die Aussage für lineare Transformationen zeigen. Seien $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und L eine Gerade. Wir wissen dass $L = L_0 + v$ mit L_0 ein Untervektorraum mit Dimension 1 und v ein Vektor. Wir sehen dass:

$$A(L) = A(L_0 + v) = \{A(P + v) \mid P \in L_0\} = \{AP + Av \mid P \in L_0\} = A(L_0) + Av$$

und $A(L_0)$ ist wieder ein Untervektorraum mit dimension 1, da A eine invertierbare lineare Abbildung ist. Das zeigt dass $A(L)$ eine Gerade ist.

2. Wie im (1), es reicht die Aussage fur Translationen und lineare Transformationen separat zu zeigen. Seien L_1, L_2 zwei parallele Geraden: das bedeutet dass $L_1 = L_0 + v_1, L_2 = L_0 + v_2$ für eine gerade L_0 durch 0 und zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Sei $A \in GL_2(\mathbb{R}^2)$: dann haben wir im Beweis vom Punkt (1) gezeigt dass $A(L_1) = A(L_0) + Av_1, A(L_2) = A(L_0) + Av_2$ und dass $A(L_0)$ eine Gerade durch 0 ist. Das zeigt dass $A(L_1), A(L_2)$ parallel sind. Sei nun $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, dann $t_w(L_1) = L_1 + w = L_0 + (v_1 + w)$ und $t_w(L_2) = L_2 + w = L_0 + (v_2 + w)$. Das zeigt dass $t_w(L_1), t_w(L_2)$ parallel sind.

   Die Außage für inzidente Gerade ist einfacher und wir lassen es als Hausaufgabe.

□

Bemerkung 1.1.26. Aus dieser Proposition folgen viele andere, z.B.:

(1) Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Dann $f(L(P_1, P_2)) = L(f(P_1), f(P_2))$.

Beweis. Wir wissen dass $f(L(P_1, P_2))$ eine Gerade ist, und dass diese Gerade $f(P_1), f(P_2)$ enthält. Die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft ist $L(f(P_1), f(P_2))$. □

(2) Seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ Punkte und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Die Punkte $P_i, i = 1, \ldots, n$ sind kollinear genau dann, wenn die Punkte $f(P_i), i = 1, \ldots, n$ kollinear.

Beweis. Wenn $P_1, \ldots, P_k$ kollinear sind, sei L eine Gerade durch diese Punkte. Dann ist $f(L)$ eine Gerade durch $f(P_1), \ldots, f(P_n)$. Die andere Implikation folgt aus dieser, wenn wir die affine Transformation f^{-1} betrachten. □

Bemerkung 1.1.27. Im Allgemein, jede Außage über Parallelität, Inzidenz, Kollinearität,... bleibt durch eine affine Transformation unverändert. Wenn wir dann eine solche Aussage beweisen wollen, können wir eine affine Transformation verwenden, um eine Aussage zu erhalten, die einfacher zu zeigen ist. Für diese Strategie wollen wir in der Lage sein, bestimmte affine Transformationen zu erstellen

Satz 1.1.28 (Fundamentalsatz der affinen Transformationen in der Ebene)**.** *Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ nicht-kollineare Punkte und seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}$ auch nicht-kollineare Punkte. Es gibt eine einzige affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass*

$$f(P_i) = Q_i, \qquad \textit{für } i = 1, 2, 3$$

Beweis. Wir zeigen zuerst dass so eine affine Transformation existiert. Wir betrachten die zwei Translationen t_{-P_3}, t_{-Q_3}:

$$\begin{aligned} &t_{-P_3}(P_1) = P_1 - P_3, \quad t_{-P_3}(P_2) = P_2 - P_3, \quad t_{-P_3}(P_3) = 0 \\ &t_{-Q_3}(Q_1) = Q_2 - Q_3, \quad t_{-Q_3}(Q_2) = Q_2 - Q_3, \quad t_{-Q_3}(Q_3) = 0 \end{aligned}$$

Da die drei Punkte $0, P_2 - P_3, P_3 - P_3$ auch nicht kollinear sind, müssen die zwei Vektoren $P_1 - P_3, P_2 - P_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sein. Eine ähnliche Begründung zeigt dass $Q_1 - Q_3, Q_2 - Q_3$ auch eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind. Dann existiert eine einzige $A \in GL_2(\mathbb{R})$ so dass $A(P_1 - P_3) = Q_1 - Q_3, A(P_2 - P_3) = Q_2 - Q_3$. Sei denn $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$: sie ist eine affine Transformation weil sie eine Komposition von affine Transformationen ist. Außerdem, wenn $i = 1, 2$ dann $f(P_i) = t_{Q_3}(A(P_i - P_3)) = t_{Q_3}(Q_i - Q_3) = Q_i$, und wir sehen auch dass $f(P_3) = t_{Q_3}A(0) = t_{Q_3}(0) = Q_3$.

Sei nun $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine andere affine Transformation so dass $g(P_i) = Q_i$. Wir wollen zeigen dass $g = f$, und das ist äquivalent zu $A = t_{-Q_3} \circ g \circ t_{P_3}$. Sei $G = t_{-Q_3} \circ g \circ t_{P_3}$: diese ist eine affine Transformation weil sie die Komposition von affine Transformationen ist. Außerdem, $G(0) = t_{-Q_3}(g(P_3)) = t_{-Q_3}(Q_3) = 0$ so dass G linear ist. Endlich, wenn $i = 1, 2$, sehen wir dass $G(P_i - P_3) = t_{-Q_3}(f(P_i)) = t_{-Q_3}(Q_i) = Q_i - Q_3$, so dass $G = A$. □

Bemerkung 1.1.29. Der Beweis dieses Satzes zeigt auch wie wir die affine Transformation f finden können. Wir müssen die einzige lineare Abbildung A finden, so dass $A(P_1 - P_3) = Q_1 - Q_3, A(P_2 - P_3) = Q_2 - Q_3$, und dann $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$.

Beispiel 1.1.30. Wir betrachten die drei nicht-kollineare Punkte $P_1 = (2, 1), P_2 = (1, 2), P_3 = (1, 1)$ und die drei nicht-kollineare Punkte $Q_1 = (2, 1), Q_2 = (1, 2), Q_3 = (2, 2)$. Wir wollen die einzige affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $f(P_i) = Q_i$ finden. Es gibt verschiedene Strategie:

- Bemerkung 1.1.29: wir sehen dass $P_1 - P_3 = (1, 0), P_2 - P_3 = (0, 1)$ und $Q_1 - Q_3 = (0, -1), Q_2 - Q_3 = (-1, 0)$. Wir betrachten nun die Matrix

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ so dass } \quad A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

  Dann zeigt die Bemerkung1.1.29 dass $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$. Wir können f in der üblichen Form einer Affinität schreiben:

  $$f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3} = f_{I_2,Q_3} \circ f_{A,0} \circ f_{I_2,-P_3} = f_{I_2,Q_3} \circ f_{A,-AP_3} = f_{A,-AP_3+Q_3} = f_{A,\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}$$

- Brute force: wir suchen eine invertierbare Matrix $A \in GL_2(\mathbb{R}^2)$ und einen Vektor v so dass $AP_i + v = Q_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. Wir schreiben

  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

und dann wollen wir dass

$$\begin{pmatrix} 2a+b+v_x \\ 2c+d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+2b+v_x \\ c+2d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b+v_x \\ c+d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir können diese Gleichungen als lineares System schreiben

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und dann können wir dieses lineares System lösen. Wir sehen aber dass dieses System nicht so klein ist. Die Strategie der Bemerkung 1.1.29 ist in der Regel besser.

Als Beispiel für die Nützlichkeit von affinen Transformationen beweisen wir ein klassisches Ergebnis der ebenen Geometrie

Satz 1.1.31 (Satz von Pappos - Affine Version)**.** *Seien A, B, C drei Punkte auf einer Gerade, und P, Q, R drei Punkte auf einer anderen verschiedene Gerade. Wenn die zwei Geradepaaren $L(A, Q), L(P, B)$ und $L(B, R), L(Q, C)$ parallel sind, dann sind auch $L(A, R)$ und $L(P, C)$ parallel.*

Beweis. Da affine Transformationen parallele Geraden in parallele Geraden und kollineare Punkte in kollineare Punkte verwandeln, können wir den Satz auch nach Anwendung einer beliebigen affinen Transformation beweisen. Um eine geeignete Transformation zu finden, betrachten wir zwei Fälle: sei L die Gerade durch A, B, C und ℓ die Gerade durch P, Q, R

- $L \cap \ell \neq \emptyset$: sei $S \in L \cap \ell$. Die drei Punkte S, A, R sind nicht kollinear, da $L \neq \ell$. Dann durch eine affine Transformation können wir annehmen dass $S = (0, 0), A = (1, 0), R = (0, 1)$. Dann $B = (b, 0), C = (c, 0)$ und $P = (0, p), Q = (0, q)$ für manche $b, c, p, q \in \mathbb{R}$. Die Geraden $L(A, Q), L(P, B)$ sind parallel, genau dann, wenn $A - Q = (1, -q)$ und $P - B = (-b, p)$ linear abhängig sind. Das bedeutet

  $$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -q & p \end{pmatrix} = p - bq$$

  Eine ähnliche Begründung mit den Geraden $L(B, R), L(Q, C)$ zeigt dass

  $$0 = \det \begin{pmatrix} b & -c \\ -1 & q \end{pmatrix} = bq - c$$

  Dann $P = (0, bq), C = (bq, 0)$ so dass $L(A, R) = \{x + y = 1\}, L(P, Q) = \{x + y = bq\}$ parallel sind.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 24.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

- $L \cap \ell = \emptyset$: dann sind L, ℓ parallel. Die drei Punkte A, B, R sind nicht kollinear (sonst $R \in L$ und das ist unmöglich) und durch eine affine Transformation können wir annehmen dass $A = (0,0), B = (1,0), R = (0,1)$. Dann $C = (c,0), P = (p,1), Q = (q,1)$ für $c, p, q \in \mathbb{R}$. Da die Gerade $L(A,Q), L(P,B)$ parallel sind, müssen die zwei Vektoren $Q - A = (q,1)$ und $P - B = (p-1,1)$ linear abhängig sein. Das bedeutet

$$0 = \det \begin{pmatrix} q & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = q - p + 1$$

Eine ähnliche Begründung mit den Geraden $L(B,R), L(Q,C)$ zeigt dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & q-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + q - c$$

Dann $P = (p,1), C = (p,0)$ so dass $L(A,R) = \{x = 0\}$ und $L(P,C) = \{x = p\}$ parallel sind.

□

1.1.2 Die affine Ebene über anderen Körpern

Jetzt machen wir eine wichtige Beobachtung: In unserer gesamten bisherigen Diskussion haben wir nie irgendwelche besonderen Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet, außer der Tatsache, dass $\mathbb{R}^2$ ein Körper ist. Das bedeutet, dass alles für ein beliebiges Feld $\mathbb{K}$ durchgeht, und wir können auf dieselbe Weise die affine Ebene $\mathbb{K}^2$ und Punkte und Linien auf ihr definieren. Alles, was wir für die reelle affine Ebene bewiesen haben, gilt auch für $\mathbb{K}^2$, gehen Sie unsere Beweise durch, wenn Sie nicht überzeugt sind.

Beispiel 1.1.32. Die affine Ebene $\mathbb{Q}^2$ ist ist die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in der alle Punkte rationale Koordinaten haben.

Beispiel 1.1.33. Der affine Raum $\mathbb{C}^2$ ist schwer zu veranschaulichen, da er "4 reelle Dimensionen" hat, aber wir haben schon gesagt, dass er sich wie der Raum $\mathbb{R}^2$ verhält, so dass man auch in diesem Fall sehr oft die gleichen zweidimensionalen Bilder zeichnet

Beispiel 1.1.34. Der affine Raum $\mathbb{F}_2^2$ ist eine Menge mit vier Elementen:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{([0],[0]), ([0],[1]), ([1],[0]), ([1],[1])\}$$

Eine Gerade $L \subseteq \mathbb{F}^2$ ist eine Translation einer Untervektorraum mit Dimension 1, und jeder Untervektorraum mit Dimension 1 ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$. Insbesondere enthält jede Gerade genau 2 Punkte. Andererseits, durch jede zwei Punkte geht eine Gerade. Das zeigt dass die Geraden in $\mathbb{F}_2$ genau die Teilmengen mit 2 Elementen sind. Insbesondere haben wir 6 Geraden.

Man kann zeigen, dass, wenn $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen ist, es genau $q(q+1)$ Geraden in $\mathbb{F}_q^2$ gibt

Natürlich gibt es auch Aussagen, die vom jeweiligen Körper abhängen. Zum Beispiel sind die einzigen Körper , für die es sinnvoll ist, die Anzahl der Zeilen zu zählen, endliche Körper.

Eine subtilere Aussage, die für die reellen Zahlen gilt, aber nicht allgemein, ist die folgende:

Satz 1.1.35 (Sylvester-Gallai, 1933 vermutet und 1944 bewiesen)**.** *Seien $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ nicht kollineare Punkte. Dann existiert eine Gerade L die genau zwei dieser Punkte enthält.*

Beispiel 1.1.36. Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ so dass $\zeta^3 = 1$. Wir betrachten die folgende Punkte in $\mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{2}, 0\right) & (-1, 1) \\ \left(0, \frac{\zeta}{1+\zeta}\right) & \left(\frac{\zeta}{\zeta+1}, 0\right) & \left(\frac{\zeta}{\zeta-2}, -\frac{1}{\zeta-2}\right) \\ \left(0, \frac{\zeta^2}{1+2\zeta^2}\right) & \left(\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}, 0\right) & \left(\frac{\zeta^2}{\zeta^2-2}, -\frac{1}{\zeta^2-2}\right) \end{array}$$

Das Sylvester-Gallai-Theorem versagt für diese Punkte: jede Linie in $\mathbb{C}^2$, die zwei dieser Punkte enthält, muss einen dritten enthalten. Dies ist ein Beispiel für eine Hesse-Konfiguration.

Wir werden nun affine Räume in beliebiger Dimension und über beliebigen Körpern betrachten.

1.2 Affine Räume

Definition 1.2.1 (Affiner Raum)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der standard n-dimensionale affine Raum über $\mathbb{K}$ ist die Menge $\mathbb{K}^n$.

Beispiel 1.2.2. Die Menge $\mathbb{K}$ ist die affine Gerade und $\mathbb{K}^2$ ist die affine Ebene.

Definition 1.2.3 (Affiner Unterraum)**.** Einer affine Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit der Form

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 & = 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m & = 0 \end{array} \right\}$$

für $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Anders gesagt, einer affine Unterraum ist die Lösungsmenge eines lineares Gleichungssystems.

Bemerkung 1.2.4. Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}, b = (b_i) \in \mathbb{K}^m$. Wir können den affine Unterraum L in einer kompakter Form schreiben:

$$L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + b = 0\} = \{Ax + b = 0\}$$

Beispiel 1.2.5. Man sollte die affine Unterräume

$$L_1 = \{x = y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3, \qquad L_2 = \{x + y + z = 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ skizzieren.

Beispiel 1.2.6. Der ganze Raum $\mathbb{K}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind affine Unterräume: $\mathbb{K}^n = \{0 \cdot x = 0\}$ und $\emptyset = \{0 \cdot x = 1\}$, wobei $0 \cdot x$ die Multiplikation mit einer $1 \times n$ Null-Matrix ist.

Punkte $P = (x_{P1}, \dots, x_{Pn})$ sind auch affine Unterräume: $P = \{x_1 - x_{P1} = \cdots = x_n - x_{Pn} = 0\}$.

Lemma 1.2.7. *Die folgende sind äquivalent:*

1. *Affine Unterräume $L \subseteq \mathbb{K}^n$ die durch 0 gehen.*
2. *Affine Unterräume $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Gleichung $L = \{Ax + b = 0\}$.*
3. *Untervektorräume $L \subseteq \mathbb{K}^n$.*

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $L = \{Ax + b = 0\}$ ein affiner Unterraum, der durch 0 geht. Dann $0 = A \cdot 0 + b = b$. Das bedeutet dass $L = \{Ax = 0\}$.

(2) $\implies$ (3): Sei $L = \{Ax = 0\}$. Dann ist $L = \operatorname{Ker} A$ ein Untervektorraum.

(3) $\implies$ (1): Sei $U \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum, dann wissen wir aus der lineare Algebra dass $U = \{Ax = 0\}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. □

Wie in der affinen Ebene, haben wir Translationen in den affinen Raum:

Definition 1.2.8 (Translation)**.** Sei $v \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor. Die Translation durch v ist die Abbildung

$$t_v \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, P \mapsto x + v$$

Wenn $X \subseteq \mathbb{K}^2$ eine Teilmenge ist, schreiben wir

$$X + v = t_v(X) = \{x + v \mid x \in X\}$$

Bemerkung 1.2.9. Wie für Translationen in der Ebene, sieht man dass

1. $t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$
2. $t_v \circ t_u = t_{v+u}$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$.

Insbesondere sind alle Translationen invertierbar und

$$t_v^{-1} = t_{-v} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{K}^n$$

Die Translationen abbilden eine freie und transitive Gruppenoperation der additive Gruppe $(\mathbb{K}^n, +)$ auf $\mathbb{K}^n$.

Lemma 1.2.10. *Sei $L = \{Ax + b = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum.*

1. *Eine Translation von L ist ein affiner Unterraum: sei $v \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor, dann*
$$L + v = \{A(x - v) + b = 0\} = \{Ax + (b - Av) = 0\}$$
2. *Wenn $L \neq \emptyset$, gibt es einen einzigen Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ so dass L eine Translation von L_0 ist: $L = L_0 + v$ für ein $v \in \mathbb{K}^n$. Dieser Untervektorraum ist*
$$L_0 = \{Ax = 0\}$$
3. *Wenn $L \neq \emptyset$, gilt dass $L = L_0 + v$ genau dann, wenn $v \in L$.*

Beweis. 1. Wir sehen dass

$$x \in L + v \iff x - v \in L \iff A(x - v) + b = 0$$

und das ist genau was wir zeigen wollten.

2. Seien $v \in L$ und $L_0 = \{Ax = 0\}$. Wir zeigen dass $L = L_0 + v$, mit Punkt (1):

$$L_0 + v = \{A(x - v) = 0\} = \{Ax - Av) = 0\} = \{Ax + b = 0\} = L$$

   Sei nun $L_0' \subseteq \mathbb{K}^n$ ein anderer Untervektorraum so dass $L = L_0' + v'$ für ein $v' \in \mathbb{R}^2$. Da L_0' eine Translation von L ist, sehen wir dass $L_0' = \{Ax + b' = 0\}$ (die Matrix A ist die selbe von L), und da L_0' durch 0 geht, sehen wir dass $b' = 0$. Dann $L_0 = L_0'$.

3. Wenn $v \in L$, haben wir schon gezeigt dass $L = L_0 + v$. Andererseits, wenn $L = L_0 + v$, dann $v = 0 + v \in L$, da $0 \in L_0$.

□

Definition 1.2.11 (Untervektorraum eines affinen Unterraum)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n, L \neq \emptyset$ ein affiner Unterraum. Der einzige Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ so dass L eine Translation von L_0 ist, ist der zu L assoziierter Untervektorraum.

Definition 1.2.12 (Dimension eines affinen Unterraum)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Wenn $L \neq \emptyset$, sei $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ der assoziierte Untervektorraum, die Dimension von L ist

$$\dim L := \dim L_0$$

Wir setzen auch $\dim \emptyset = -1$.

Beispiel 1.2.13. Eine Gerade ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Dimension $\dim L = 1$. Eine Ebene ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Dimension $\dim L = 2$. Eine Hyperebene ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $\dim L = n - 1$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 29.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.2.1 Beschreibungen eines affinen Unterraums

(Dieser Abschnitt wird im Präsenzblatt der Übungseinheiten besprochen.) Ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ist durch Gleichungen definiert,und, wenn er nicht leer ist, dann ist er auch eine Translation eines Untervektorraums. Das bedeutet dass ein affiner Unterraum zwei mögliche Beschreibungen hat:

- **Durch lineare Gleichungen**:

$$L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + b = 0\} \qquad \text{mit } A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

$$L_0 = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \operatorname{Ker} A$$

  Normalerweise wollen wir eine **minimale Menge von Gleichungen**, also $n - k$ Gleichungen, wobei $k = \dim L$. Das bedeutet dass A eine $(n - k) \times n$ Matrix mit Rang $n - k$ ist.

- **Durch eine Parametrisierung**:

$$L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}, \qquad \text{mit } v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n \text{ und } P \in L$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

$$L_0 = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

  Normalerweise wollen wir eine **minimale Parametrisierung**, was bedeutet, dass die $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von L_0 sind, so dass $k = \dim L_0 = \dim L$.

Wenn wir eine Darstellung durch Gleichungen haben, ist es einfach, eine minimale Menge von Gleichungen durch das Gauß-Algorithmus zu erhalten

Algorithmus 1.2.14. (**Von Gleichungen zu minimale Gleichungen**): Sei $L = \{Ax + b\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Menge von Gleichungen für L wie folgt finden:

1) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A| - b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'| - b')$ in (reduzierte) Zeilenstufenform.

2) Wir können $\mathrm{Rang}(A')$ und $\mathrm{Rang}(A'| - b')$ berechnen. Wenn $\mathrm{Rang}(A') \neq \mathrm{Rang}(A'| - b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.

3) Wenn $\mathrm{Rang}(A') = \mathrm{Rang}(A'| - b')$. Dann $\dim L = n - \mathrm{Rang}\, A$, und $L = \{A'x + b' = 0\}$ ist eine Beschreibung von L durch eine minimale Menge von $n - \dim L$ Gleichungen.

Beispiel 1.2.15. Wir finden eine minimale Menge von Gleichungen für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 & = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Wir bringen die erweiterte Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrows Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - 2Z1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen dass der Rang mit oder ohne der letzten Spalte immer 2 ist. Das bedeutet dass $\dim L = 4 - 2 = 2$ und dass

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ -5x_2 - x_3 - 3x_4 + 1 & = 0 \end{array} \right\}$$

eine minimale Beschreibung von L durch Gleichungen ist.

Algorithmus 1.2.16. (**Von einer Parametrisierung zu einer minimale Parametrisierung**): Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Parametrisierung wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1|\dots|v_k) \in \mathbb{K}^{n\times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat.

2) Wir bringen die Matrix C mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix C' in Zeilenstufenform. Insbesondere $r = \mathrm{Rang}(C') = \dim L$.

3) Wenn C' pivots in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ hat, dann sind $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0, so dass
$$L = \{t_{j_1}v_{j_1} + \dots + t_{j_r}t_{j_r} + P \,|\, t_{j_1}, \dots, t_{j_r} \in \mathbb{K}\}$$
eine minimale Parametrisierung von L ist.

Beispiel 1.2.17. Sei
$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$
wir finden eine minimale Parametrisierung von L durch das Algorithmus:
$$\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix} \xrightarrow[Z3\to Z3-3Z1]{Z2\to Z2-2Z1} \begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{pmatrix} \xrightarrow{Z3\to Z3-2Z2} \begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$
Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und hat Pivots in der Spalten 1 und 2. Das zeigt dass $\dim L = 2$ und dass
$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right)$$
eine Basis von L_0 ist. Insbesondere bekommen wir eine minimale Parametrisierung von L als
$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

Wir werden nun zwei Methoden vorstellen, um mit Hilfe des Gauß-Algorithmus von einer Darstellung zur anderen zu wechseln. Es ist wichtig zu beachten, dass die von uns vorgestellten Methoden nur zwei der möglichen Methoden sind. Insbesondere im Fall von Geraden in $\mathbb{K}^2$ war die "Brute Force" eine Methode, die funktionierte. Diese "Brute Force" Methode ist in anderen Fällen oft zu kompliziert, so dass von ihrer Anwendung abgeraten wird.

Algorithmus 1.2.18. (**Von Gleichungen zu einer Parametrisierung**): Sei $L = \{Ax + b = 0\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Parametrisierung von L wie folgt finden:

1) Wir bringen die Matrix $(A| - b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'| - b')$ in reduzierte Zeilenstufenform.

2) Wir können $\mathrm{Rang}(A')$ und $\mathrm{Rang}(A'| - b')$ berechnen. Wenn $\mathrm{Rang}(A') \neq \mathrm{Rang}(A'| - b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.

3) Wenn $\mathrm{Rang}(A') = \mathrm{Rang}(A'| - b')$, dann $P = -b'$ ist ein Punkt in L und L selbst hat Dimension $k = n - \mathrm{Rang}(A')$.

4) Wir verwenden die Gleichungen $A'x = 0$, um die Variablen x_i, die den Pivots von A' entsprechen, in Form der anderen Variablen zu schreiben.

5) Dies ergibt eine Basis $v_1, \dots, v_k$ von $L_0 = \{Ax = 0\}$.

6) Wir haben eine minimale Parametrisierung $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_i \in \mathbb{K}\}$

Beispiel 1.2.19. Wir finden eine minimale Parametrisierung für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 3 & = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

Wir anwenden das Algorithmus

$$(A| - b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2 \to -\frac{1}{2} Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1 \to Z1 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in reduzierter Zeilenstufenform mit Pivots in den Spalten 1 und 2. Wir schreiben das lineare System, das dieser Matrix entspricht, und wir schreiben die Variablen x_1, x_2 durch die anderen

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 1 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -x_3 + 1 \\ x_2 & = x_4 \end{cases}$$

So dass $x \in L$ genau dann, wenn

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis vom assoziierten Untervektorraum L_0.

Algorithmus 1.2.20. (**Von einer Parametrisierung zu Gleichungen:**) Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Beschreibung von U durch Gleichungen wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1|\dots|v_k) \in \mathbb{K}^{n\times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat. Wir betrachten $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in \mathbb{K}^{k\times 1}$ als ein Spaltenvektor von Variabeln. Dann

$$L = \{x \,|\, Ct + P = x \text{ für ein } t \in \mathbb{K}^k\} = \{x \,|\, Ct = x - P \text{ hat eine Lösung } t \in \mathbb{K}^k\}$$

2) Wir betrachten die erweiterte Matrix $(C|x - P)$ und wir bringen sie mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix $(C'|x')$ womit C' Zeilenstufenform hat. Die Matrix C' hat $\mathrm{Rang}(C') = \dim L$ und die erste $\mathrm{Rang}(C')$ Zeilen von C' sind nicht null, alle andere sind null.

3) Eine minimale Menge von Gleichungen für L erhält man, indem man die letzten $(n-\mathrm{rk}(C'))$-Einträge von x' auf Null setzt. Dies sind die Einträge, die den Nullzeilen von C' entsprechen.

4) Als Nebenprodukt können wir auch eine Basis von L_0 finden: wenn C' Pivots in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ hat, dann sind die ursprünglichen Vektoren $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0.

Beispiel 1.2.21. Wir finden eine minimale Beschreibung durch Gleichungen für den affine Unterraum

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2i \\ i \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \,|\, t_i \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

Wir wenden die elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ -1 & 1 & 0 & | & x_3 + i \\ 2 & 1 & 3i & | & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z4\to Z4-2Z1]{Z3\to Z3+Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ 0 & 2 & 2i & | & x_1 + x_3 + i \\ 0 & -1 & -i & | & -2x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z4\to Z4+Z2]{Z3\to Z3-2Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_2 - i \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i \\ 0 & 0 & 0 & | & -2x_1 + x_2 + x_4 - i \end{pmatrix}$$

Sei C' diese Matrix ohne die letzte Spalte. Die Matrix C' ist in Zeilenstufenform, $\mathrm{Rang}(C') = 2$, und die letzte 2 Zeilen von C' sind null. Das bedeutet dass eine minimale Menge von Gleichungen für L ist

$$L = \begin{Bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i & = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 - i & = 0 \end{Bmatrix}$$

1.2.2 Schnittmenge und affine Hülle

Lemma 1.2.22. *Seien $L_i \subseteq \mathbb{K}^n, i \in I$ affine Unterräume. Die Schnittmenge $\cap_{i\in I} L_i$ ist ein affiner Unterraum und*

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \left(\bigcap_{i\in I} L_{i,0} \right) + v$$

wobei $v \in \cap_{i\in I} L_i$ und $L_{i,0}$ der assoziierte Untervektorraum zu L_i ist.

Beweis. Wenn $\cap_{i\in L} L_i = \emptyset$ dann sind wir fertig, da die leere Menge affin ist. Wenn nicht, sei $v \in \cap_{i\in I}$: wir wissen dass $L_i = L_{i,0} + v$ wobei $L_{0,i}$ der assoziierte Untervektorraum zu L_i ist. Dann

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \bigcap_{i\in I}(L_{i,0} + v) = \left(\bigcap_{i\in I} L_{i,0}\right) + v$$

und $\bigcap_{i\in I} L_{i,0}$ ist ein Untervektorraum, weil die Schnittmenge von Untervektorräumen ein Untervektorraum ist. Das zeigt dass $\bigcap_{i\in I} L_i$ einer Translation eines Untervektorraums ist, was bedeutet dass es ein affiner Unterraum ist. □

Beispiel 1.2.23. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{Q}^3$:

$$L_1 = \{x + y + z = 2\}, \qquad L_2 = \{x = 0, y - z = 0\}$$

Dann

$$L_1 \cap L_2 = \left\{\begin{matrix} x + y + z & = 2 \\ x & = 0 \\ y - z & = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2z & = 2 \\ x & = 0 \\ y & = z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beispiel 1.2.24. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{C}^4$:

$$L_1 = \left\{\begin{pmatrix} s + t - 2i \\ 0 \\ s \\ t + 2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C}\right\}, \quad L_2 = \{x + i \cdot y + z + w = 4\}$$

Dann ist $L_1 \cap L_2$ die Menge von Punkten $(s + t - i, 0, s, t + 2), s, t \in \mathbb{C}$ so dass

$$(s + t - 2i) + i \cdot 0 + s + (t + 2) = 4$$

Das ist äquivalent zu $2s + 2t = 2 + 2i$, was bedeutet $s = -t + 1 + i$. Das zeigt dass

$$L_1 \cap L_2 = \left\{\begin{pmatrix} -t + 1 + i + t - 2i \\ 0 \\ -t + 1 + i \\ t + 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 - i \\ 0 \\ -t + 1 + i \\ t + 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\right\}$$

Beispiel 1.2.25. Wenn zwei affine Unterräume $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ beide durch eine Parametrisierung gegeben sind, dann ist es normalerweise besser eine oder beide durch Gleichungen zu beschreiben, um die Schnittmenge $L_1 \cap L_2$ zu berechnen.

Definition 1.2.26 (Affine hülle)**.** Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Die affine Hülle $L(S)$ von S, oder der von S erzeugter Unterraum ist die Schnittmenge aller affine Unterräume die S enthälten:

$$L(S) = \bigcap_{\substack{L\subseteq\mathbb{K}^n \text{ affin,} \\ L\supseteq S}} L$$

Bemerkung 1.2.27. Die affine Hülle $L(S)$ ist der kleinste affine Unterraum der S enthält. Insbesondere $L(S) = S$ genau dann, wenn S ein affiner Unterraum ist.

Bemerkung 1.2.28. In der lineare Algebra, die lineare Hülle einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}^n$ oder der von T erzeugter Untervektorraum ist

$$\langle T \rangle = \bigcap_{\substack{L_0 \subseteq \mathbb{K}^n,\ \text{U.Vr.} \\ L_0 \supseteq T}} L_0$$

Es gibt eine Interpretation der affine Hülle durch die lineare Hülle: sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ nicht leer und sei $P_0 \in S$ ein Punkt. Wir betrachten die Translation $S - P_0$. Wir wollen nun zeigen dass

$$L(S) = \langle S - P_0 \rangle + P_0$$

Insbesondere ist $\langle S - P_0 \rangle$ der assoziierte Untervektorraum von $L(S)$

Beweis. Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Wenn $L \supseteq S$, dann $P_0 \in L$, so dass $L_0 = L - P_0$ ein Untervektorraum der $S - P_0$ enthält ist. Andererseits, wenn $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum so dass $L_0 \supseteq S - P_0$ ist, dann ist $L = L_0 + P_0$ ein affiner Unterraum, der S enthält. Das zeigt dass

$$L(S) = \bigcap_{\substack{L \subseteq \mathbb{K}^n \text{ affin}, \\ L \supseteq S}} L = \bigcap_{\substack{L \subseteq \mathbb{K}^n \text{ affin}, \\ L \supseteq S}} (L - P_0) + P_0 = \bigcap_{\substack{L_0 \subseteq \mathbb{K}^n,\ \text{U.Vr.} \\ L_0 \supseteq S - P_0}} L_0 + P_0 = \langle S - P_0 \rangle + P_0$$

□

Beispiel 1.2.29. Sei $S = \{P, Q\} \subseteq \mathbb{K}^n$ wobei P, Q zwei verschiedene Punkte sind. Wir sehen dass $S - Q = \{P - Q, 0\}$ und der Untervektorraum erzeugt von dieser Menge ist $\langle P - Q \rangle = \{t(P - Q) \mid t \in \mathbb{K}\}$. Dann

$$L(P, Q) = \langle P - Q \rangle + Q = \{t \cdot (P - Q) + Q \mid P, Q \in \mathbb{K}\} = \{t \cdot P + (1 - t) \cdot Q \mid t \in \mathbb{K}\}$$

Wir sehen dass $L(P, Q)$ eine Gerade ist, und, wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^2$ dann ist sie genau die einzige Gerade die durch P, Q geht.

Dieses Beispiel kann generalisiert werden

Definition 1.2.30 (Affine Kombination)**.** Seien $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkte. Eine affine Kombination dieser Punkte ist ein Punkt mit der Form

$$\sum_{i=1}^{r} t_i P_i, \qquad t_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1$$

Proposition 1.2.31. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Die affine Hülle $L(S)$ ist die Menge von aller mögliche affine Kombinationen von Punkten in S:*

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i P_i \mid P_i \in S,\ t_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 \right\}$$

Beweis. Wenn $S = \emptyset$, dann sind beide Seite gleich $\emptyset$. Wenn $S \neq \emptyset$, sei $P_0 \in S$. Der Untervektorraum $\langle S - P_0 \rangle$ ist die Menge von alle mögliche lineare Kombinationen von Vektoren in $S - P_0$:

$$\langle S - P_0 \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i (P_i - P_0) \mid P_i \in S, t_i \in \mathbb{K} \right\}$$

und dann

$$L(S) = \langle S - P_0 \rangle + P_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i P_i + (1 - \sum_{i=1}^{r} t_i) P_0 \,|\, t_i \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{r} t_i P_i \,|\, P_i \in S, t_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 \right\}$$

Das ist was wir zeigen wollten. □

Beispiel 1.2.32. Die affine Hülle von der Punkten $P_1 = (2,0,0), P_2 = (0,3,0), P_3 = (0,0,4)$ in $\mathbb{R}^3$ ist

$$L(P_1, P_2, P_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 \\ 3t_2 \\ 4t_3 \end{pmatrix} \,|\, t_1 + t_2 + t_3 = 1 \right\}$$

und man kann auch leicht eine Beschreibung durch eine Gleichung finden:

$$L(P_1, P_2, P_3) = \left\{ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1 \right\}$$

Wir können die affine Hülle zweier affine Unterräume durch die Summe von Untervektorräume bestimmen:

Proposition 1.2.33. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei nicht leere affine Unterräume, seien M_0, N_0 die assoziierten Untervektorräume und seien $P_0 \in M_0, Q_0 \in N_0$. Dann*

$$L(M, N) = \langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0 \rangle + P_0$$

und $P_0 - Q_0 \in M_0 + N_0$ genau dann, wenn $M \cap N \neq \emptyset$. Insbesondere

$$\dim L(M, N) = \begin{cases} \dim(M_0 + N_0), & \textit{falls } M \cap N \neq \emptyset \\ \dim(M_0 + N_0) + 1, & \textit{falls } M \cap N = \emptyset \end{cases}$$

Beweis. Wir haben $M = M_0 + P_0$ und $N = N_0 + Q_0$ so dass

$$L(M, N) = \langle M - P_0, N - P_0 \rangle + P_0 = \langle M_0, N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle + P_0$$

Nun sehen wir dass $\langle N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle = \langle N_0, Q_0 - P_0 \rangle$, weil $0 \in N_0$. Dann $\langle M_0, N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle = \langle M_0, N_0, Q_0 - P_0 \rangle = \langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0 \rangle$. Wir müssen nun zeigen dass $Q_0 - P_0 \in M_0 + N_0$ genau dann, wenn $M \cap N \neq \emptyset$. Nehmen wir an dass $Q_0 - P_0 = v + w$ für $v \in M_0, w \in N_0$. Dann $v + P_0 = -w + Q_0$ und die linke Seite ist ein Punkt in M wahrend die rechte Seite ein Punkt in N ist, so dass wir einen Punkt in $M \cap N$ gefunden haben. Andererseits, wenn $M \cap N \neq \emptyset$, sei $R_0 \in M \cap N$: dann $P_0 = v + R_0, Q_0 = w + R_0$ für $v \in M_0, w \in N_0$, so dass $Q_0 - P_0 = w - v \in M_0 + N_0$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 31.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Beispiel 1.2.34. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{Q}^3$.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} s-1 \\ -s+1 \\ s \end{pmatrix} \,|\, s \in \mathbb{Q} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Die assoziierten Untervektorräume sind $M_0 = \{(s, -s, s) \mid s \in \mathbb{Q}\} = \langle(1, -1, 1)\rangle$ und $N_0 = \{(2t, t, t) \mid t \in \mathbb{Q}\} = \langle(2, 1, 1)\rangle$ und $P_0 = (-1, 1, 0) \in M$ und $Q_0 = (0, 1, 0) \in N$. Wir berechnen

$$\langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{Q}^3$$

weil diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Dann $L(M, N) = \mathbb{Q}^3 + P_0 = \mathbb{Q}^3$.

Beispiel 1.2.35. Wenn zwei affine Unterräume durch eine Parametrisierung gegeben sind, ist es einfach, die affine Hülle über Proposition zu berechnen. Wenn stattdessen einer oder beide durch Gleichungen gegeben sind, dann ist es besser, sie zunächst durch eine Parametrisierung zu beschreiben und dann die affine Hülle zu berechnen.

Korollar 1.2.36. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume, dann*

$$\dim L(M, N) \leq \dim M + \dim N + 1$$

Außerdem, wenn $M \cap N \neq \emptyset$ gilt dass

$$\dim L(M, N) = \dim M + \dim N - \dim M \cap N$$

Beweis. Wenn M oder N leer ist, ist die Formel leicht zu zeigen. Wenn beide M, N nicht leer sind, seien M_0, N_0 die assoziierten Untervektorräume. Nehmen wir zuerst an, dass $M \cap N \neq \emptyset$: dann zeigt Lemma 1.2.22 dass $\dim M \cap N = \dim M_0 \cap N_0$ und Proposition 1.2.33, dass $\dim L(M, N) = \dim(M_0 + N_0)$. Dann die übliche Formel für Untervektorräume ergibt

$$\dim L(M, N) + \dim M \cap N = \dim(M_0 + N_0) + \dim(M_0 \cap N_0) = \dim M_0 + \dim N_0 = \dim M + \dim N$$

Wenn $M \cap N = \emptyset$, dann $\dim(M \cap N) = -1$. Außerdem zeigt Proposition 1.2.33 dass

$$\dim L(M, N) = \dim(M_0 + N_0) + 1 = \dim(M_0) + \dim(N_0) - \dim(M_0 \cap N_0) + 1 \leq \dim M + \dim N + 1$$

□

Definition 1.2.37 (Parallele affine Unterräume)**.** Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume und seien L_0, M_0 die assoziierte Untervektorräume. Die affine Unterräume L, M sind parallel, wenn $L_0 \subseteq M_0$ oder $M_0 \subseteq L_0$.

Bemerkung 1.2.38. Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume mit $\dim L = \dim M$. Dann sind L, M parallel, genau dann, wenn $L_0 = M_0$.

Bemerkung 1.2.39. Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei parallele affine Unterräume, wenn $L \cap M \neq \emptyset$, dann $L \subseteq M$ oder $M \subseteq L$. Insbesondere sind zwei parallele Untervektorräume mit der gleiche Dimension entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. Seien L_0, M_0 die assoziierte Untervektorräume und nehmen wir an, dass $L_0 \subseteq M_0$. Sei auch $v \in L \cap M$. Dann $L = L_0 + v$ und $M = M_0 + v$, so dass $L \subseteq M$. □

Bemerkung 1.2.40. Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum mit assoziierter Untervektorraum L_0 und sei $P \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $L_0 + P$ der einziger affiner Unterraum mit der gleiche Dimension von L, der parallel zu L ist und durch P geht.

Beweis. Der affiner Unterraum $L_0 + P$ ist parallel zu L und geht durch P. Jeder andere affine Unterraum mit dieser Eigenschaft muss aufgrund der vorherigen Bemerkung gleich sein. □

Beispiel 1.2.41 (Zwei Geraden in $\mathbb{K}^n$)**.** Wir betrachten zwei verschiedene Geraden $L, M \subseteq \mathbb{K}^n, n \geq 2$.

- **Inzidente Geraden**: Wenn $L \cap M \neq \emptyset$, dann $L \cap M = \{P\}$, sonst müssen die zwei Geraden gleich sein. Dann $\dim L(M, N) = 1 + 1 - 0 = 2$. Diese zwei Geraden liegen auf einer gleichen Ebene (sie heißen koplanar)
- **Parallele Geraden**: Wenn $L \cap M = \emptyset$ und die Geraden parallel sind, dann $\dim L(L, M) = \dim(L_0 + M_0) + 1 = \dim L_0 + 1 = 2$. Diese zwei Geraden sind koplanar.
- **Windschiefe Geraden**: Wenn $L \cap M = \emptyset$ und L, M nicht parallel sind, dann heißen die Geraden windschief. Das ist möglich nur wenn $n \geq 3$. In diesem Fall, $\dim L(M, N) = \dim(M_0 + N_0) + 1 = 2 + 1 = 3$.

1.2.3 Lineare allgemeine Lage

Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung: Wenn wir einen Punkt hinzufügen, kann die Dimension der affinen Hülle höchstens um eins wachsen:

Lemma 1.2.42. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge und sei $P \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt. Dann*

$$\dim L(S \cup \{P\}) = \begin{cases} \dim L(S) + 1, & \textit{falls } P \notin L(S) \\ \dim L(S), & \textit{falls } P \in L(S) \end{cases}$$

Beweis. Wir können annehmen dass S ein affine Unterräum $S = M$ ist (warum?), so dass $L(S) = L(M) = M$. Wir sehen dass

$$\dim L(M, P) = \begin{cases} \dim(M_0 + 0) + 1, & \text{falls } P \cap M = \emptyset \\ \dim(M_0 + 0), & \text{falls } P \cap M \neq \emptyset \end{cases}$$

und das ist was wir zeigen wollen. □

Wir können dieses Lemma so verstehen, dass wir in der "allgemeinen" Situation von $P \notin L(S)$ eine "erwartete" Dimension $\dim L(S \cup \{P\}) = \dim L(S) + 1$ haben. Stattdessen haben wir in der "besonderen" Situation, $P \in L(S)$, die "unerwartete" Dimension $\dim L(S \cup \{P\}) = \dim L(S)$. Warum nennen wir den Fall $P \notin L(S)$ "allgemein"? Weil es in gewisser Weise "mehr" Punkte außerhalb von $L(S)$ als innerhalb von $L(S)$ gibt. Wenn wir zum Beispiel über $\mathbb{R}$ einen Punkt "zufällig" auswählen, wird er außerhalb von $L(S)$ liegen. Es gibt nur einen Fall, in dem diese Idee versagt: wenn $L(S) = \mathbb{K}^n$ bereits der ganze Raum ist.

Insbesondere betrachten wir Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots \in \mathbb{K}^n$. Für zwei Punkte ist die allgemeine Situation $\dim L(P_1, P_2) = 1$ und die spezielle Situation ist, dass $P_1 = P_2$. Zwei Punkte erzeugen also eine Gerade, außer wenn, die beiden Punkte gleich sind. Für drei Punkte ist die allgemeine Situation $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, und die spezielle Situation ist, dass $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$: drei Punkte erzeugen eine Ebene, außer wenn, sie kollinear sind. Man beachte, dass es eine noch speziellere Situation $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 0$ gibt, die dann und nur dann eintritt, wenn $P_1 = P_2 = P_3$. Jetzt machen wir daraus eine genaue Definition:

Korollar 1.2.43. *Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$. Dann*

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) \leq r - 1$$

Beweis. Induktiv über r. Wenn $r = 1$, dann $\dim L(P_1) = \dim\{P_1\} = 0$. Wenn die Aussage wahr für $r-1$ ist, dann zeigt Lemma 1.2.42 dass $\dim L(P_1, \dots, P_r) \leq \dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) + 1 \leq r - 1 + 1 = r$. □

Definition 1.2.44 (Lineare allgemeine Lage)**.** Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkte. Falls $r \leq n+1$, sagen wir dass die Punkte in linearer allgemeiner Lage sind, falls

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$$

Falls $r > n+1$ sagen wir dass die Punkten in linearen allgemeinen Lage sind, falls jede Teilmenge $P_{i_1}, \dots, P_{i_{n+1}}$ in linearen allgemeinen Lage ist.

Lemma 1.2.45. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge von Punkte in linearer allgemeiner Lage. Dann ist jede Teilmenge $T \subseteq S$ auch in linearer allgemeiner Lage.*

Beweis. Wir müssen zeigen dass, wenn $r \leq n+1$ und $\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$, dann $\dim L(P_1, \dots, P_k) = k - 1$ für alle $k \leq r$. Es reicht, die Aussage für $k = r - 1$ zu zeigen. Dank Korollar 1.2.43, müssen wir zeigen, dass $\dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) \geq r - 2$ und Lemma 1.2.42 zeigt dass

$$\dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) \geq \dim L(P_1, \dots, P_r) - 1 = r - 1 - 1 = r - 2$$

□

Remark 1.2.46. Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkten. Dann

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) = \dim\langle P_1 - P_r, \dots, P_{r-1} - P_r\rangle$$

so dass, wenn $r \leq n+1$, die Punkte $P_1, \dots, P_r$ sind in linearer allgemeiner Lage, genau dann, wenn die Vektoren $P_1 - P_r, \dots, P_{r-1} - P_r$ linear unabhängig sind. Man kann auch die Lemmata und der Korollar in dieser Sektion durch die Eigenschaften der linear Unabhängigkeit zeigen.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 5.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.3 Affine Abbildungen

Definition 1.3.1 (Affine Abbildung)**.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist affin, wenn F die folgende Form hat

$$f = f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad x \mapsto Ax + v, \qquad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, v \in \mathbb{K}^m$$

Beispiel 1.3.2. Lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind affin, und translationen $t_v\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $v \in \mathbb{K}^n$ sind affin:

$$A = f_{A,0}, \qquad t_v = f_{I_n,v}$$

Wir sehen dass eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear ist, genau dann, wenn $f(0) = 0$.

Bemerkung 1.3.3. Eine affine Abbildung ist die Komposition einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ mit einer Translation $y \mapsto y + v$.

Bemerkung 1.3.4. Anders gesagt, eine affine Abbildung ist eine Abbildung mit der Form

$$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + v_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + v_m \end{pmatrix}$$

Lemma 1.3.5. *1. Die Komposition von affine Abbildungen ist affin: wenn $f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $f_{B,w}\colon \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^n$ affine Abbildungen sind, dann ist*

$$f_{A,v} \circ f_{B,w} = f_{AB,Aw+v}$$

auch affin.

2. $f_{A,v}$ is injektiv (bzw. surjektiv) genau dann, wenn $f_{A,0} = A$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

3. Eine affine Abbildung $f_{A,b}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist invertierbar, genau dann, wenn $n = m$ und $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Die inverse Abbildung ist

$$f_{A,v}^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}v}$$

Insbesondere ist die inverse einer affine Abbildung wieder affin.

Beweis. 1. $(f_{A,v} \circ f_{B,w})(x) = f_{A,v}(Bx + w) = ABx + Aw + w$.

2. Da t_{-v} invertierbar ist, sehen wir dass $f_{A,v}$ is injektiv (bzw. surjektiv) ist, genau dann, wenn $f_{A,0} = t_{-v} \circ f_{A,v}$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

3. Wenn $f_{A,v}$ invertierbar ist, dann ist $t_{-b} \circ f_{A,v} = f_{A,0}$ linear und invertierbar. Das bedeutet, dass $n = m$, dass $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und dass $f_{A,b}^{-1} = (t_b \circ f_{A,0})^{-1} = f_{A^{-1},0} \circ t_{-b} = f_{A^{-1},-A^{-1}b}$

□

Definition 1.3.6 (Affine Transformation)**.** Eine affine Transformation oder Affinität von $\mathbb{K}^n$ ist eine invertierbare affine Abbildung

$$f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad A \in GL_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n$$

Die Menge von allen affine Transformationen ist $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$.

Bemerkung 1.3.7. Die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ ist eine Gruppe mit der Komposition. Wie in der Bemerkung 1.1.24, es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{K}^n \to \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \to GL_n(\mathbb{K}) \to 1$$

und diese Gruppe ist ein semidirektes Produkt $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n \ltimes GL_n(\mathbb{K})$.

Beispiel 1.3.8 (Zentrische Streckungen)**.** Eine Zentrische Streckung oder eine Homotethie ist eine affine Transformation $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit der Form

$$f(x) = \lambda \cdot (x - v_0) + v_0 \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}^\times, v_0 \in \mathbb{K}^n$$

Wir sehen dass $f(v_0) = v_0$ und dass $f(v_0 + w) = \lambda w$ für alle $w \in \mathbb{K}^n$: Diese affine Transformation "streckt" die durch v_0 verlaufenden Linien um einen Faktor λ. Das ist was passiert, wenn wir die "Pinch-to-Zoom"-Bewegung auf dem Bildschirm eines Smartphones ausführen

Satz 1.3.9. *Seien $P_1, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{K}^n$ Punkte in linearer allgemeiner Lage und seien $Q_1, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{K}^m$ beliebige Punkte. Es gibt eine einzige affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ so dass*

$$f(P_i) = Q_i \qquad \textit{für alle } i = 1, \dots, n+1$$

Außerdem, ist f invertierbar, genau dann, wenn $n = m$ und $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind.

Beweis. Wir sehen dass eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ hat die Eigenschaft dass $f(P_i) = Q_i$ genau dann, wenn die affine Abbildung $g = t_{-Q_{n+1}} \circ f \circ t_{P_{n+1}}$ die Eigenschaft $g(P_i - P_{n+1}) = Q_i - Q_{n+1}$ hat. Insbesondere $g(0) = g(P_{n+1} - P_{n+1}) = Q_{n+1} - Q_{n+1} = 0$ so dass g linear ist. Da die Punkte $P_1, \dots, P_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind, sind die Vektoren $P_1 - P_{n+1}, \dots, P_n - P_{n+1}$ linear unabhängig, und das bedeutet dass diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{K}^n$ sind. Dann existiert eine einzige lineare Abbildung $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ so dass $g(P_i - P_{n+1}) = Q_i - Q_{n+1}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir sehen auch dass f invertierbar ist genau dann wenn g invertierbar ist, weil Translationen invertierbar sind. Da g linear ist, sehen wir dass g invertierbar ist, genau dann, wenn $n = m$ und $Q_1 - Q_{n+1}, \dots, Q_n - Q_{n+1}$ eine Basis von $\mathbb{K}^m$ sind, was bedeutet dass $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind. □

Lemma 1.3.10. *Sei $f = f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine affine Abbildung. Seien auch $L \subseteq \mathbb{K}^n, M \subseteq \mathbb{K}^m$ affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume L_0, M_0.*

1. *Das Bild $f(L)$ ist ein affiner Unterraum, mit assoziierte Untervektorraum $f(L)_0 = A(L_0)$.*
2. *Es gilt dass $\dim f(L) = \dim L - \dim L_0 \cap \operatorname{Ker} A$. Insbesondere $\dim f(L) = \dim L$ wenn f injektiv ist.*
3. *Das Urbild $f^{-1}(M)$ ist affiner Unterraum, und wenn $f^{-1}(M) \neq \emptyset$ ist der zugehörige Untervektorraum $f^{-1}(M)_0 = A^{-1}(M_0)$[1].*
4. *Insbesondere, wenn $P \in \mathbb{K}^m$ und $f^{-1}(P) \neq \emptyset$, dann $f^{-1}(P)_0 = \operatorname{Ker} A$.*
5. *Wenn $f^{-1}(M) \neq \emptyset$, dann $\dim f^{-1}(M) = \dim M \cap f(\mathbb{K}^n) + \dim \operatorname{Ker} A$. Insbesondere $\dim f^{-1}(M) = \dim M + \dim \operatorname{Ker} A$ wenn f surjektiv ist.*
6. *Wenn $L' \subseteq \mathbb{K}^n$ affin und parallel zu L ist, Dann sind $f(L), f(L')$ auch Parallel. Wenn $M' \subseteq \mathbb{K}^m$ affin und parallel zu M ist, dann sind $f^{-1}(M), f^{-1}(M')$ auch Parallel.*
7. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann $f(L(S)) = L(f(S))$.*

[1] Hier schreiben wir A^{-1} für das Urbild von der Abbildung $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, nicht für die inverse Matrix A^{-1}

Beweis. 1. Sei $P \in L$ so dass $L = L_0 + P$. Dann $f(L) = A(L) + b = A(L_0 + P) + b = A(L_0) + AP + b$.

2. Wir sehen dass $\dim A(L_0) = \dim L_0 - \dim \operatorname{Ker} A \cap L_0$.

3. Wir nehmen an, dass $f^{-1}(M) \neq \emptyset$: sei $u \in f^{-1}(M)$, so dass $f(u) = Au + v = w \in M$. Dann $M = M_0 + w$, und $f^{-1}(M) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + v \in M_0 + w\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + v - w \in M_0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax - Au \in M_0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A(x - u) \in M_0\} = A^{-1}(M_0) + u$

4. Konsequenz von (3).

5. Mit der gleichen Notation wie im Punkt (3) sehen wir, dass $\dim A^{-1}(M_0) = \dim A(\mathbb{K}^n) \cap M_0 + \dim \operatorname{Ker} A$. Wir sehen nun, dass $\dim A(\mathbb{K}^n) \cap M_0 = \dim(A(\mathbb{K}^n - u) \cap (M - w)) = \dim(A(\mathbb{K}^n) - Au + w) \cap M = \dim(A(\mathbb{K}^n) + v) \cap M = \dim f(\mathbb{K}^n) \cap M$

6. Konsequenz von (3) und (5).

7. $f(L(S))$ ist affin und $f(L(S)) \supseteq S$, so dass $f(L(S)) \supseteq L(f(S))$. Andererseits, wenn $M \subseteq \mathbb{K}^m$ affin ist, und $M \supseteq f(S)$, dann $f^{-1}(M) \supseteq S$, so dass $f^{-1}(M) \supseteq L(S)$. Das zeigt, dass $M \supseteq f(L(S))$.

□

Eine wichtige Beispiel von affine Abbildungen sind Parallelprojektionen:

Komplementäre affine Unterräume und Parallelprojektionen

Definition 1.3.11 (Komplementäre affine Unterräume)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Ein affiner Unterraum $N \subseteq \mathbb{K}^n$ ist komplementär zu M, wenn $\dim M + \dim N = n$ und $M \cap N = \{P\}$ ein Punkt.

Lemma 1.3.12. *Seien $M, N \in \mathbb{K}^n$ nicht-leere affine Unterräume und seien M_0, N_0 die zugehörigen Untervektorräume. Die Unterräume M, N sind komplementär, genau dann, wenn M_0, N_0 komplementäre Untervektorräume sind: $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$. Insbesondere hat M immer einen komplementären Unterraum.*

Beweis. Wenn M, N Komplementär sind, dann $\dim(M_0 + N_0) = \dim L(M, N) = \dim M_0 + \dim N_0 = n$, so dass $M_0 \oplus N_0 = \mathbb{K}^n$. Andererseits, wenn $M_0 \oplus N_0 = \mathbb{K}^n$, dann $\dim(M_0 + N_0) \leq \dim L(M, N) \leq n = \dim(M_0 + N_0)$, so dass $M \cap N \neq \emptyset$ und $\dim M \cap N = 0$. Da M_0 immer einen komplementären Untervektorraum hat, sehen wir dass M immer einen komplementären affinen Unterraum hat. □

Beispiel 1.3.13. Seien $L \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Gerade und $H \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Hyperebene die nicht parallel sind. Dann sind L und H komplementär, da $\dim L_0 + N_0 = n$. Insbesondere $L \cap H = \{P\}$ ein Punkt.

Sei nun $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum, mit assoziierter Untervektorraum M_0 und sei $N \subseteq \mathbb{K}^n$ ein komplementärer Unterraum. Für jede $P \in \mathbb{K}^n$ sei $M_0 + P$ der einziger affiner Unterraum mit der gleichen Dimension von M, der parallel zu M ist und durch P geht. Dann sind $M_0 + P$ und N auch komplementär, dank dem vorherigen Lemma, so dass $(M_0 + P) \cap N$ ein Punkt ist. Wir nennen diesen Punkt $\pi_{M,N}(P)$: $(M_0 + P) \cap N = \{\pi_{M,N}(P)\}$. Das definiert eine Parallelprojektion

$$\pi_{M,N} \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow N$$

Beispiel 1.3.14. Sei $M = \{x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $N = \{x - y = 1\} \in \mathbb{R}^2$. Diese zwei affine Unterräume sind komplementär. Sei $P = (x_0, y_0)$ und sei $M + P_0 = \{x + y = x_0 + y_0\}$ die Gerade parallel zu M die durch P_0 geht. Dann $(M + P_0) \cap N = \{\big(\frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1)\big)\}$, so dass

$$\pi_{M,N} \colon \mathbb{R}^2 \to N, \qquad (x_0, y_0) \mapsto \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1)\right)$$

Wir sehen dass diese Abbildung affin ist. Das ist kein Zufall

Proposition 1.3.15. *Eine Parallelprojektion ist eine affine Abbildung: Sei $\pi_{N_0} \colon \mathbb{K}^n \to N_0$ die lineare Projektion, die von der direkten Summe $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$ definiert ist, und sei $Q_0 = M_0 \cap N$. Dann*

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P) + Q_0$$

Außerdem, wenn $N = Q + N_0$, gilt es dass

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q$$

Beweis. Wir zeigen dass eine Parallelprojektion, gesehen als eine Abbildung $\pi_{M,N} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, eine affine Abbildung ist. Sei $Q_0 = \pi_{M,N}(0) = M_0 \cap N$, so dass $N = N_0 + Q_0$ Sei $P \in \mathbb{K}^n$, dann

$$\pi_{M,N}(P) = (M_0+P)\cap N = (M_0+P)\cap(N_0+Q_0) = ((M_0+P-Q_0)\cap N_0)+Q_0 = ((M_0+P)\cap N_0)+Q_0$$

Da $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$, haben wir die zwei lineare Projektionen $\pi_{M_0} \colon \mathbb{K}^n \to M_0, \pi_{N_0} \colon \mathbb{K}^n \to N_0$ so dass $P = \pi_{M_0}(P) + \pi_{N_0}(P)$. Dann

$$(M_0 + P) \cap N_0 = (M_0 + \pi_{M_0}(P) + \pi_{N_0}(P)) \cap N_0 = (M_0 + \pi_{N_0}(P)) \cap N_0 = \{\pi_{N_0}(P)\}$$

so dass

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P) + Q_0$$

und das zeigt dass $\pi_{M,N}$ affin ist, mit der Form das wir wollen. Nehmen wir nun an, dass $N = N_0 + Q$, wir müssen zeigen dass $Q_0 = Q - \pi_{N_0}(Q)$, was bedeutet $Q - \pi_{N_0}(Q) \in M_0 \cap N$: da $\pi_{N_0}(Q) \in N_0$, sehen wir dass $Q - \pi_{N_0}(Q) \in N$,und da $Q - \pi_{N_0}(Q) = \pi_{M_0}(Q)$, sehen wir dass $\pi_{M_0}(Q) \in M_0$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 7.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Das Teilverhältnis und der Satz von Thales

Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$ drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte. Dann sind die zwei Vektoren $P_1 - P_3, P_2 - P_3$ linear abhängig:

$$P_1 - P_3 = \lambda \cdot (P_2 - P_3) \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Definition 1.3.16 (Teilverhältnis von drei kollineare Punkte)**.** Der obige Skalar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus 0, 1$ wird als das Teilverhältnis der drei geordneten kollineare und paarweise verschiedene Punkte (P_1, P_2, P_3) bezeichnet. Wir bezeichnen es auch mit

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \lambda$$

Bemerkung 1.3.17. Wir sehen dass

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_3 = \frac{1}{1-\lambda}P_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}P_2$$

Beispiel 1.3.18. Sei $v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0$ ein Vektor. Das Teilverhältnis von $(\lambda v, v, 0)$ ist λ.

Lemma 1.3.19. *Sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ und seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$ kollinear. Dann sind $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ auch kollinear und das Teilverhältnis ist unverändert*

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{f(P_1) - f(P_3)}{f(P_2) - f(P_3)}$$

Beweis. Sei $\lambda = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3}$, so dass $P_1 - P_3 = \lambda \cdot (P_2 - P_3)$. Sei $f(x) = Ax + v$ mit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Dann

$$f(P_1) - f(P_3) = A(P_1 - P_3) = A(\lambda \cdot (P_2 - P_3)) = \lambda \cdot A(P_2 - P_3) = \lambda \cdot (f(P_2) - f(P_3))$$

so dass $\lambda = \frac{f(P_1) - f(P_3)}{f(P_2) - f(P_3)}$ □

Satz 1.3.20 (Satz von Thales)**.** *Seien $H_1, H_2, H_3 \subseteq \mathbb{K}^n$ drei parallele und paarweise verschiedene Hyperebene und seien $L, L' \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei Gerade die nicht parallel zu ihnen sind. Seien $P_i = L \cap H_i, P_i' = L' \cap H_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann*

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{P_1' - P_3'}{P_2' - P_3'}$$

Anders gesagt, ist das Teilverhältnis nur abhängig von H_1, H_2, H_3 und nicht von den Geraden.

Beweis. Eine affine Transformation lässt das Teilverhaltnis unverändert, so dass wir annehmen können, dass $H_i = \{x_n = b_i\}$ für $b_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, 3$. Wir schreiben $L = \{tv + Q \mid t \in \mathbb{K}\}$ für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ und $Q = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathbb{K}^n$. Wir sehen dass mit $v_n \neq 0$, weil L nicht parallel zu H_i ist. Dann $P_i = t_i v + Q$, mit $t_i v_n + Q_n = b_i$ für $i = 1, 2, 3$: das bedeutet $t_i = \frac{b_i - Q_n}{v_n}$ für $i = 1, 2, 3$. Dann $P_i - P_3 = (t_i - t_3)$ für $i = 1, 2$, und

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} = \frac{\frac{b_2 - Q_n}{v_n} - \frac{b_3 - Q_n}{v_n}}{\frac{b_2 - Q_n}{v_n} - \frac{b_3 - Q_n}{v_n}} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$$

Das ist nur abhängig von b_1, b_2, b_3, und nicht von L. □

1.3.1 Von der affinen Geometrie zur linearen Algebra

Bisher haben wir die affine Geometrie mit Hilfe der linearen Algebra untersucht, was bedeutet, dass alle unsere Techniken und Konzepte auf den folgenden zwei grundlegenden Konstruktionen:

- Die Summe $v + w$ von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{K}^n$
- Die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot v$, von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$.

Es stellt sich heraus, dass wir den umgekehrten Weg gehen können: wir können die Summe und die Skalarmultiplikation geometrisch erhalten. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass wir Folgendes tun können:

0. Wenn $P \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt und $L \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Gerade ist, können wir überprüfen ob $P \in L$.
1. Wir können die einzige Gerade $L(P, Q)$ zwischen zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{K}^n$ konstruieren.
2. Wenn zwei verschiedene Linien L, L' inzident sind, können wir den einzigen Schnittpunkt $P = L \cap L'$ konstruieren.
3. Wir haben drei nicht kollineare Punkte. Insbesondere sind wir in $\mathbb{K}^n$, mit $n \geq 2$.
4. Bei einer Linie $L \subseteq \mathbb{K}^n$ und einem Punkt $P \notin L$ können wir die einzige Linie parallel zu L konstruieren, die durch P geht.
5. Es gibt einen festen Vektor $v_0 \in \mathbb{K}^n, v_0 \neq 0$, für den wir alle Vielfaches $\lambda \cdot v_0$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ haben. Insbesondere haben wir 0.

Proposition 1.3.21. *Mit der vorherigen Hypothese, wenn wir zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{K}^n$ haben, dann können wir die Summe $v + w$ konstruieren.*

Beweis. Dieser Beweis ist sehr geometrisch und sollte zusammen mit Bildern (siehe Tafel) betrachtet werden.

Nehmen wir zuerst an dass v, w linear unabhängig sind (das können wir überprüfen, denn es bedeutet, dass $w \notin L(0, v)$). Wir wissen dass $v + w = (L(0, v) + w) \cap (L(0, w) + v)$. Wir können die Gerade $L(0, v) + w$ konstruieren, weil sie die einzige Gerade parallel zu $L(0, v)$ und die durch w geht ist. Auf die gleiche Weise, können wir die Gerade $L(0, w) + w$ auch konstruieren. Dann können wir den einzigen Schnittpunkt $v + w$ konstruieren.

Wenn v, w linear abhängig sind, dann haben wir $u \in \mathbb{K}^n$ die linear unabhängig von v, w ist, weil wir drei nicht-kollineare Punkte haben. Wir können $v + u$ konstruieren, weil v, u linear unabhängig sind. Wir können auch die Gerade $L(0, w - u) + u + v$ konstruieren, weil diese die einzige parallele Gerade zu $L(u, w)$ die durch $u + v$ geht ist. Wir können denn den einzigen Schnittpunkt $v + w = L(v, w) \cap (L(0, w - u) + u + v)$ konstruieren. □

Proposition 1.3.22. *Mit der vorherigen Hypothese, wenn wir einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ haben und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ haben, dann können wir das Vielfaches $\lambda \cdot v$ konstruieren.*

Beweis. Dieser Beweis ist sehr geometrisch und sollte zusammen mit Bildern (siehe Tafel) betrachtet werden.

Wir können annehmen dass v und v_0 linear unabhängig sind. Wir können $\lambda \cdot v_0$ konstruieren und auch die Gerade $L = L(v, v_0)$. Dann können wir die parallele Gerade L_0 durch 0 und die parallele Gerade $L_{\lambda \cdot v_0}$ konstruieren. Der Satz von Thales zeigt dass $L_{\lambda \cdot v_0} \cap L(0, v) = \lambda \cdot v$ und wir können das konstruieren. □

Dies zeigt, dass geometrische Eigenschaften algebraische Eigenschaften bestimmen. Ein weiteres Ergebnis in diesem Sinne ist:

Satz 1.3.23 (Fundamentalsatz der reelle affine Geometrie)**.** *Sei $n \geq 2$ und sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare Abbildung so dass, wenn $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade ist, dann ist $f(L)$ eine Gerade. Dann ist f eine affine Transformation.*

Dieses Ergebnis kann in Anlehnung an die vorhergehenden Sätze bewiesen werden. Wir werden den Beweis für das Ende des Kurses aufheben, wenn wir genug Zeit haben. Es ist sogar sehr empfehlenswert, dass Sie versuchen, es selbst zu beweisen!

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 12.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.4 Affine Geometrie in euklidischen Räumen

Definition 1.4.1 (Euklidischer Raum)**.** Der euklidische Raum mit Dimension n ist der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u^t v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Bemerkung 1.4.2. Dies ist nur ein euklidischer Vektorraum, die allgemeine Definition ist die eines reellen oder komplexen Vektorraums, der mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist. Wir werden jedoch aus Gründen der Konkretheit auf den Fall von $\mathbb{R}^n$ konzentrieren.

Definition 1.4.3 (Euklidische Norm und Abstand)**.** Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^n$$

Der euklidische Abstand ist

$$d(P, Q) = \|P - Q\| \qquad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 1.4.4. Der Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand ist ein metrischer Raum. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

Wir wissen auch aus der linearen Algebra, dass die Gleichung $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ gilt, genau dann, wenn R auf der Strecke

$$[P, Q] = \{tP + (1 - t)Q \mid t \in [0, 1]\}$$

liegt (wenn das nicht bekannt ist, dann ist es eine Hausaufgabe).

Bemerkung 1.4.5. Der Abstand ist invariant für Translationen: für alle $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ gilt dass

$$d(P - R, Q - R) = \|(P - R) - (Q - R)\| = \|P - Q\| = d(P, Q)$$

Bemerkung 1.4.6. Wir erinnern uns an die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n$$

Insbesondere

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1, \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Definition 1.4.7 (Winkel)**.** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren ungleich Null. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist der einzige $\theta \in [0, \pi]$, für den gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

1.4.1 Orthogonalität und Abstand zwischen affine Unterräume

Definition 1.4.8 (Orthogonalität)**.** Zwei Vektoren u, v sind orthogonal, genau dann, wenn $\langle u, v\rangle = 0$. Zwei Untervektorräume U, V sind orthogonal, genau dann, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in U, v \in V$. Zwei affine Unterräume $M, N \subseteq \mathbb{E}^n$ sind orthogonal, genau dann, wenn die assoziierte Untervektorräume orthogonal sind.

Bemerkung 1.4.9. Zwei nicht null Vektoren sind orthogonal genau dann, wenn der Winkel zwischen den beiden $\frac{\pi}{2}$ ist.

Definition 1.4.10 (Orthogonales Komplement)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle = 0 \qquad \text{für alle } u \in U\}$$

is das orthogonales Komplement von $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Ein orthogonales Komplement von M ist ein komplementäre affine Unterraum, der orthogonal zu M ist.

Bemerkung 1.4.11. Zwei affine Unterräume $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ sind orthogonal genau dann, wenn $N_0 \subseteq M_0^\perp$. Das bedeutet dass N_0 und $M_0^\perp$ parallel sind. Insbesondere, alle orthogonale Komplemente von M haben die Form $M_0^\perp + u$ für ein $u \in \mathbb{K}^n$.

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht leere affine Unterraum. Der Unterraum $N_0^\perp$ ist ein orthogonales Komplement von N. Dann haben wir die Parallelprojektion

$$\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$$

definiert. Wir haben auch gesehen dass, für jedes $Q \in N$, gilt dass

$$\pi_{N_0^\perp, N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q,$$

wobei $\pi_{N_0} \colon \mathbb{R}^n \to N_0$ die orthogonale lineare Projektion ist, die von der Dekomposition $\mathbb{R}^n = N_0^\perp \oplus N_0$ definiert ist. Insbesondere sehen wir dass

$$P - \pi_{N_0^\perp, N}(P) = (P - Q) - \pi_{N_0}(P - Q) = \pi_{N_0^\perp}(P - Q)$$

orthogonal zu N ist.

Definition 1.4.12 (Orthogonale Projektion)**.** Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht leerer affiner Unterraum. Die Parallelprojektion

$$\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$$

heißt die orthogonale Projektion auf N.

Bemerkung 1.4.13. Wir erinnern uns, dass die lineare orthogonale Projektion $\pi_{N_0} \colon \mathbb{R}^n \to N_0$ über eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_r$ berechnet werden kann als

$$\pi_{N_0}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

Wenn $N = Q + N_0$ können wir denn die orthogonale Projektion $\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$ wie folgt berechnen:

$$\pi_{N_0^\perp, N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle P - Q, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i + Q$$

Beispiel 1.4.14. Wir betrachten die Ebene $H = \{x = 1\} \subseteq \mathbb{E}^3$. Eine orthonormale Basis von $H_0 = \{x = 0\}$ ist (e_2, e_3) und $Q = (1, 0, 0) \in H$. Die orthogonale Projektion $\pi_{H_0^\perp, H} \colon \mathbb{E}^3 \to H$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Gerade $L = \{(t+1, -t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{E}^3$. Eine orthogonale Basis von L_0 ist $v = (1, -1, 0)$, mit $\|v\|^2 = 2$. Wir haben auch einen Punkt $(1, 0, 1) \in L$. Die orthogonale Projektion $\pi_{L_0^\perp, L} \colon \mathbb{E}^3 \to L$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4.15. *Sei $N \subseteq \mathbb{E}^n$ ein affiner Unterraum und sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Der Punkt $\pi_{N_0^\perp, N}(P)$ ist der einzige Punkt auf N, der am nächsten an P liegt:*

$$\|P - \pi_{N_0^\perp, N}(P)\| \leq \|P - Q\| \qquad \text{für alle } Q \in N$$

und die Gleichung gilt genau dann, wenn $Q = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$.

Beweis. Durch die Translation t_{-P}, können wir annehmen, dass $P = 0$. Sei denn $Q_0 = \pi_{N_0^\perp, N}(0) = N_0^\perp \cap N$. Wir haben $N = Q_0 + N_0$ und wir müssen zeigen, dass $\|Q_0\| \leq \|Q_0 + v\|$ für alle $v \in N_0$, mit Gleichung genau dann, wenn $v = 0$. Um dies zu beweisen, können wir beide Seiten quadrieren und da $Q_0 \in N_0^\perp$, sehen wir dass

$$\|Q_0 + v\|^2 = \|Q\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle Q_0, v\rangle = \|Q_0\|^2 + \|v^2\| \geq \|Q_0\|^2$$

mit Gleichung genau dann, wenn $\|v\|^2 = 0$, was bedeutet $v = 0$. □

Definition 1.4.16 (Abstand zwischen einem Punkt und einem affinen Unterraum)**.** Seien $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Die Abstand zwischen P und N ist

$$d(P, N) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in N\}$$

Der vorherige Satz zeigt, dass dieses Minimum nur an dem Punkt $\pi_{N_0^\perp, N}(P) \in N$ erreicht ist:

$$d(P, N) = \|P - \pi_{N_0^\perp, N}(P)\| = \|(P - Q) - \pi_{N_0}(P - Q)\| = \|\pi_{N_0^\perp}(P - Q)\|$$

für alle $Q \in N$.

Bemerkung 1.4.17. Wenn $Q \in N$, sehen wir dass $Q = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$ genau dann, wenn die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist.

Beweis. Sei $Q_0 = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$. Wir sehen dass $P - Q_0 = \pi_{N_0}^\perp(P - Q_0)$ orthogonal zu N ist. Andererseits, sei $Q \in N$, so dass $Q = Q_0 + v$ mit $v \in N_0$. Dann ist $P - Q = P - Q_0 + v$ in $N_0^\perp$ genau dann, wenn $v_0 \in N_0^\perp$ ist. Das bedeutet $v = 0$. □

Bemerkung 1.4.18. Wir sehen dass $d(P, N) = 0$ genau dann, wenn $P \in N$.

Beispiel 1.4.19. Seien H und L wie im Beispiel 1.4.14, und sei $P = (2, 2, 2) \in \mathbb{E}^3$. Wir sehen dass

$$d(P, H) = \|P - \pi_{H_0^\perp, H}(P)\| = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$
$$d(P, L) = \|P - \pi_{L_0^\perp, L}(P)\| = \|(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)\| = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

Wir können auch die Abstand zwischen zwei beliebige affine Unterräume betrachten

Proposition 1.4.20. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nicht-leere affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume M_0, N_0.*

1. *Seien $P \in M, Q \in N$. Es gilt dass $d(P, Q) \leq d(P', Q')$ für alle P,genau dann, wenn die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu beiden M und N ist.*

2. *Es gibt Punkte $P \in M, Q \in N$ mit die Eigenschaft in (1), und diese Punkten sind eindeutig bestimmt, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 = \{0\}$.*

Beweis. 1. Nehmen wir an, dass die Gleichung $d(P, Q) \leq d(P', Q')$ für alle $P' \in M, Q' \in N$ gilt. Das bedeutet insbesondere dass $d(P, Q) = d(P, N)$, so dass die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist. Eine symmetrische Begrundung zeigt, dass die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist.

Andererseits, nehmen wir an, dass $L(P, Q)$ orthogonal zu M und N ist. Das bedeutet, dass $P - Q \in M_0^\perp \cap N_0^\perp$. Punkte $P' \in M, Q' \in N$ haben die Form $P' = P + v, Q' = Q + w$ für $v \in M_0, w \in N_0$. Wir sehen dass

$$\begin{aligned}\|P' - Q'\|^2 = \|P - Q + v - w\|^2 &= \|P - Q\|^2 + \|v - w\|^2 + 2\langle P - Q, v - w\rangle \\ &= \|P - Q\|^2 + \|v - w\|^2 \geq \|P - Q\|^2.\end{aligned}$$

mit Gleichung genau dann, wenn $v = w$. Insbesondere können wir P', Q' finden, verschiedene von P, Q und mit $\|P' - Q'\| = \|P - Q\|$, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 \neq \{0\}$.

2. Wir müssen zeigen dass Punkte $P \in M, Q \in N$ mit $L(P, Q)$ orthogonal zu M_0 und N_0 existieren. Die Gerade $L(P, Q)$ ist orthogonal zu M und N genau dann, wenn $P = u + Q$ mit $u \in M_0^\perp \cap N_0^\perp = (M_0 + N_0)^\perp$. Das bedeutet, dass $P \in (M_0^\perp \cap N_0^\perp + N) \cap M$. Die Menge $M_0^\perp \cap N_0^\perp + N$ ist ein affiner Unterraum mit assoziierte Untervektorraum $M_0^\perp \cap N_0^\perp + N_0$ und wenn $(M_0^\perp \cap N_0^\perp + N) \cap M = \emptyset$, dann

$$\begin{aligned}\dim L(M_0^\perp \cap N_0^\perp + N, M) &= \dim(M_0^\perp \cap N_0^\perp + M_0 + N_0) + 1 \\ &= \dim((M_0 + N_0)^\perp + (M_0 + N_0)) + 1 = n + 1\end{aligned}$$

unmöglich. Wir haben schon gezeigt, dass solche Punkte P, Q eindeutig sind, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 = 0$.

□

Definition 1.4.21 (Abstand zwischen affine Unterräume)**.** Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nicht-leere affine Unterräume. Der Abstand zwischen M, N ist:

$$d(M, N) = \min\{d(P, Q) \mid P \in M, Q \in N\}$$

Bemerkung 1.4.22. Wir sehen dass $d(M,N) = 0$ genau dann, wenn $M \cap N \neq \emptyset$.

Bemerkung 1.4.23. Seien $P \in M, Q \in N$. Dann $d(P,Q) = d(M,N)$ genau dann, wenn die Gerade $L(P,Q)$ orthogonal zu M und N ist.

Beispiel 1.4.24. Seien $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei windschiefe Geraden, durch Parametrisierungen gegeben:

$$L_1 = \langle v_1 \rangle + P_1, \quad L_2 = \langle v_2 \rangle + P_2$$

Da L_1, L_2 windschief sind, existieren einzige Punkte $Q_1 \in L_1, Q_2 \in L_2$ so dass $d(Q_1,Q_2) = d(L_1,L_2)$. Diese sind genau die Punkte so dass $Q_1 - Q_2$ orthogonal zu v_1, v_2 ist. Wir suchen also $Q_1 = t_1 v_1 + P_1, Q_2 = t_2 v_2 + Q_2$ so dass

$$\begin{cases} \langle t_1 v_1 + P_1 - t_2 v_2 - P_2, v_1 \rangle = 0 \\ \langle t_1 v_1 + P_1 - t_2 v_2 - P_2, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & -\langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & -\langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle P_1 - P_2, v_1 \rangle \\ \langle P_1 - P_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = 0$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für (t_1, t_2) mit eine einzige Lösung. Wir können das System lösen und die Punkte Q_1, Q_2 finden. Dann können wir auch die Abstand $d(L_1,L_2) = d(Q_1,Q_2)$ berechnen.

Beispiel 1.4.25. Wir betrachten die zwei Geraden $L_1 = \{x = 0, z = 0\} = \langle (0,1,0) \rangle, L_2 = \{z = 1, x - y = 0\} = \langle (1,1,0) \rangle + (0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$. Wir suchen $Q_1 = (0,t_1,0), Q_2 = (t_2,t_2,1)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ so dass $Q_1 - Q_2$ orthogonal zu $(0,1,0), (1,1,0)$ ist. Das bedeutet

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} -t_2 \\ t_1 - t_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = t_1 - t_2$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} -t_2 \\ t_1 - t_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = t_1 - 2t_2$$

Die einzige Lösung ist $t_1 = t_2 = 0$, so dass $Q_1 = (0,0,0), Q_2 = (0,0,1)$ und $d(L_1,L_2) = d(Q_1,Q_2) = 1$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 14.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Wenn man nur den Abstand zwischen zwei affine Unterräume finden will, und nicht die Punkte, die den Abstand berechnen, dann ist es einfacher:

Lemma 1.4.26. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume M_0, N_0. Seien auch $P \in M, Q \in N$ beliebige Punkte. Dann*

$$d(M,N) = \|(P - Q) - \pi_{M_0+N_0}(P - Q)\| = \|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P - Q)\|$$

wobei $\pi_{M_0+N_0} \colon \mathbb{R}^n \to (M_0 + N_0)$ und $\pi_{(M_0+N_0)^\perp} \colon \mathbb{R}^n \to (M_0 + N_0)^\perp$ die lineare orthogonale Projektionen sind.

Beweis. Seien $P' \in M, Q' \in N$ zwei Punkte so dass $L(P',Q')$ orthogonal zu beide M und N ist. Das bedeutet dass $P' - Q' \in M_0^\perp \cap N_0^\perp = (M_0 + N_0)^\perp$. Wir wissen dass $P = P' + u, Q = Q' + w$ für $u \in M_0, w \in N_0$. Dann

$$d(M,N) = \|P' - Q'\| = \|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P' - Q')\| = \|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P - Q + u - w)\| = \|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P - Q)\|$$

□

1.4.2 Isometrien

Definition 1.4.27 (Isometrie)**.** Eine Isometrie ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abstände erhält:

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \qquad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{R}^n$$

Die Menge aller Isometrien von $\mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 1.4.28. Translationen sind Isometrien. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ist eine Isometrie und $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ist auch eine Isometrie.

Bemerkung 1.4.29. Außerdem, die Komposition von Isometrien ist eine Isometrie, und, wenn eine Isometrie invertierbar ist, dann ist die Inverse auch eine Isometrie. Wir werden bald zeigen, dass jede Isometrie invertierbar ist, und dies wird beweisen, dass $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ eine Gruppe mit der Komposition ist.

Wir können alle Isometrien klassifizieren: wir erinnern uns an orthogonale Matrizen

Definition 1.4.30 (Orthogonale Matrizen, Orthogonale Gruppe)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, falls

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Das ist äquivalent zu $A^tA = I_n$.Die Menge aller orthogonale Matrizen ist die orthogonale Gruppe $O_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1.4.31. Eine orthogonale Matrix hat Determinante $\det(A) = \pm 1$.

Definition 1.4.32 (Spezielle orthogonale Gruppe)**.** Die Menge aller orthogonale Matrizen mit Determinante 1 ist die spezielle orthogonale Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$.

Satz 1.4.33. *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn sie eine affine Transformation $f = f_{A,v}$ ist, mit der Form*

$$f(x) = Ax + v, \qquad A \in O_n(\mathbb{R})$$

Beweis. Wir zeigen zuerst dass affine Transformationen mit der Form $f(x) = Ax + v, A \in O_n(\mathbb{R})$ Isometrien sind: seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$, dann

$$d(f(P), f(Q)) = \|AP - AQ\| = \|A(P - Q)\| = \|P - Q\| = d(P, Q)$$

Andererseits, sei f eine Isometrie. Da die Komposition $t_{-f(0)} \circ f$ noch eine Isometrie ist, können wir annehmen dass $f(0) = 0$. Dann $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$. Seien nun $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren: wir sehen dass

$$2\langle f(v), f(w)\rangle = \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - \|f(v) - f(w)\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2 = 2\langle v, w\rangle$$

so dass $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Wenn wir zeigen, dass f linear ist, sind wir fertig. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sind auch eine orthonormale Basis, weil $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$. Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Da $f(v_1), \dots, f(v_n)$ eine orthonormale Basis von ist, wissen wir dass

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \langle f(v), f(v_i)\rangle \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$$

Das bedeutet dass f linear ist, und wir sind fertig. $\square$

Alternativer Beweis. Wir geben einen alternativen und mehr geometrischen Beweis, indem wir annehmen, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare Isometrie ist. Wir wollen zeigen dass f affin ist, und die Idee ist den Fundamentalsatz der affinen Geometrie zu nutzen: wir müssen zeigen dass wenn $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade ist, dann ist $f(L)$ auch eine Gerade. Wir zeigen zuerst dass wenn P, Q, R kollinear sind, dann sind $f(P), f(Q), f(R)$ auch kollinear: wir können annehmen dass R auf der Strecke $[P, Q]$ liegt. Dann

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) = d(f(P), f(R)) + d(f(R), f(Q))$$

und das zeigt dass $f(R) \in [f(P), f(Q)]$. Sei nun L eine Gerade und seien $P, Q \in L$ verschiedene Punkte. Sei auch $L' = L(f(P), f(Q))$. Wir wissen dass wenn $R \in L$, dann $f(R) \in L(f(P), f(Q))$, so dass $f(L) \subseteq L'$. Da die inverse Abbildung f^{-1} auch eine invertierbare Isometrie ist, sehen wir dass $f^{-1}(L') \subseteq L$. Das bedeutet dass $f(L) = L'$ und das zeigt dass f affin ist. Dann können wir wie im vorherigen Beweis weitermachen. □

Beispiel 1.4.34 (Spiegelungen)**.** Sei $H_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine lineare Hyperebene, d.h. ein Untervektorraum mit $\dim H_0 = n - 1$. Dann $\dim H_0^\perp = 1$. Die Spiegelung mit Achse H_0 ist die Abbildung:

$$\sigma_{H_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto x - 2\pi_{H_0^\perp}(x) = -x + 2\pi_{H_0}(x) = \pi_{H_0}(x) - \pi_{H_0^\perp}(x) = x - 2\frac{\langle x, v_0\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} \cdot v_0$$

wobei $\pi_{H_0^\perp}\colon \mathbb{R}^n \to H_0^\perp, \pi_{H_0}\colon \mathbb{R}^n \to H_0$ die zwei lineare orthogonale Projektion sind und v_0 ein Erzeuger von $H_0^\perp$ ist. Diese Abbildung ist linear und wir sehen dass $\sigma_{H_0|H_0} = \mathrm{id}_{H_0}$ und $\sigma_{H_0|H_0^\perp} = -\mathrm{id}_{H_0^\perp}$: wenn $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine orthonormale Basis von H_0 ist und v_0 eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ ist, dann ist $\mathcal{B} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma_{H_0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Denn sieht man dass $\sigma_{H_0} \in O_n(\mathbb{R})$ und $\det \sigma_{H_0} = -1$. Zum Beispiel, betrachten wir die Gerade $L_0 = \{x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$: wir sehen dass $L_0^\perp = \langle (1, -1)\rangle$ so dass

$$\sigma_{L_0}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{x - y}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Sei nun $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene, mit assoziierte Untervektorraum H und sei $P \in H$ ein beliebiges Punkt. Die Spiegelung mit Achse H ist die affine Transformation $\sigma_H = t_P \circ \sigma_{H_0} \circ t_{-P}$:

$$\sigma_H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \sigma_{H_0}(x - P) + P$$

Wir sehen dass

$$\sigma_{H_0}(x - P) + P = -x + P + 2\pi_{H_0^\perp}(x - P) + P = -x + 2\pi_{H_0^\perp, H_0}(x)$$

so dass die Abbildung unabhängig von P ist. Diese affine Transformation ist eine Isometrie weil sie die Komposition von Isometrien ist. Zum Beispiel, betrachten wir die Gerade $L = \{x - y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$: die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{x - y = 0\}$, und $P = (1, 0) \in L$. Denn

$$\sigma_L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sigma_{L_0}\left(\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 1 \\ x - 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.4.35 (Drehungen)**.** Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Die ebene lineare Drehung mit Winkel θ ist die lineare Abbildung

$$R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$. Für ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ können wir auch die Isometrie $R_\theta^P = t_P \circ R_\theta \circ t_{-P}$ betrachten:

$$R_\theta^P(x) = R_\theta(x - P) + P$$

Sie ist die ebene Drehung von Winkel θ um den Punkt P.

Ebene Isometrien

Wir haben verschiedene Arten von Ebene Isometrie schon gesehen: Translationen t_P , Drehungen um einen Punkt $t_P \circ R_\theta \circ t_{-P}$ und Spiegelungen σ_L. Eine andere Art von ebene Isometrie ist eine Gleitspiegelung, d.h. die Komposition einer Spiegelung mit einer Translation durch einen Vektor, der parallel zur Spiegelungsachse ist: $t_v \circ \sigma_L$ mit v, L parallel und $v \neq 0$.

Proposition 1.4.36 (Klassifikation von Ebene Isometrien)**.** *Jede ebene Isometrie $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ist eine Translation, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

Beweis. Wir betrachten zuerst die lineare Isometrien: sei $A \in O_2(\mathbb{R})$. Wenn $A \in SO_2(\mathbb{R})$ dann kann man leicht zeigen, dass $A = R_\theta$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Wenn $\det(A) = -1$, dann $A' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot A \in SO_2(\mathbb{R})$, so dass $A' = R_\theta$ für ein θ. Dann

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Insbesondere sehen wir, dass das charakteristisches Polynom von A ist $\chi_A(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Das bedeutet, dass A diagonalisierbar ist: sei $L_0 = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ der Eigenraum für 1, so dass $A_{|L_0} = \mathrm{id}_{L_0}$ und $A_{|L_0^\perp} = -\mathrm{id}_{L_0^\perp}$. Das zeigt, dass A eine Spiegelung ist: $A = \sigma_{L_0}$. Wir haben gezeigt dass eine lineare Isometrie entweder eine Drehung oder eine Spiegelung ist:

$$O_2(\mathbb{R}) = \{ \text{ lineare Drehungen } \} \sqcup \{ \text{ lineare Spiegelungen } \}$$

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 19.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Eine allgemeine Isometrie $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ist der Komposition einer linearen Drehung oder eine linearen Spiegelung mit einer Translation. Sei R_θ eine lineare Drehung und sei $Q \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Komposition $t_Q \circ R_\theta$. Wenn $R_\theta = I_2$, dann $t_Q \circ R_\theta = t_Q$ ist eine Translation. Nehmen wir an, dass $R_\theta \neq I_n$. Wir sehen dass $t_Q \circ R_\theta$ ein Fixpunkt P hat, genau dann, wenn $R_\theta(P) + Q = P$, und das bedeutet $(I - R_\theta)P = Q$. Eine nicht-triviale Drehung R_θ hat kein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Das bedeutet, dass $I - R_\theta$ invertierbar ist, so dass $P = (R_\theta - I)^{-1}(Q)$ ein Fixpunkt von $t_Q \circ R_\theta$ ist. Dann

$$(t_Q \circ R_\theta)(x) = R_\theta x + Q = R_\theta x - R_\theta P + P = R_\theta(x - P) + P = R_\theta^P(x)$$

so dass $t_Q \circ R_\theta = t_P \circ R_\theta \circ t_P = R_\theta^P$ eine Drehung um P ist.

Sei nun σ_{L_0} eine lineare Spiegelung. Wir betrachten die Komposition $t_Q \circ \sigma_{L_0}$. Diese Komposition hat ein Fixpunkt $P \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $P - 2\pi_{L_0^\perp}(P) + Q = P$, was bedeutet $2\pi_{L_0^\perp}(P) = Q$. So ein P existiert genau dann, wenn $Q \in L_0^\perp$ und in diesem Fall

$$(t_Q \circ \sigma_{L_0})(x) = x - 2\pi_{L_0^\perp}(x) + 2\pi_{L_0^\perp}(P) = \sigma_{L_0}(x - P) + P = \sigma_{L_0+P}(x)$$

so dass $t_Q \circ \sigma_{L_0} = \sigma_{L_0+P}$ eine Spiegelung ist. Wenn $Q \notin L_0^\perp$, dann können wir schreiben $Q = \pi_{L_0}(Q) + \pi_{L_0^\perp}(Q)$, mit $\pi_{L_0}(Q) \neq 0$, und wir sehen dass

$$t_Q \circ \sigma_{L_0} = t_{\pi_{L_0}(Q)} \circ (t_{\pi_{L_0^\perp}(Q)} \circ \sigma_{L_0}) = t_{\pi_{L_0}(Q)} \circ \sigma_{L_0+\pi_{L_0^\perp}(Q)}$$

eine Gleitspiegelung ist. □

Lineare Drehungen in drei Dimensionen

Sei $H_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine lineare Ebene und sei $H_0^\perp$ die Gerade durch 0 die orthogonal zu H_0 ist. Die Drehung auf H_0 mit Winkel θ oder auch die Drehung um die Achse $H_0^\perp$ mit Winkel θ ist die Isometrie

$$R_{H_0,\theta} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

so dass $R_{H_0,\theta|H_0}$ eine Drehung mit Winkel θ ist und $R_{H_0,\theta|H_0^\perp} = \mathrm{id}_{H_0^\perp}$. Wenn v_1, v_2 eine orthonormale Basis von H_0 und v_3 eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ sind, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$, und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_{H_0,\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere,sehen wir dass $R_{H_0,\theta} \in SO_3(\mathbb{R})$.

Beispiel 1.4.37. Sei $H_0 = \{x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$: eine orthonormale Basis von H_0 ist $v_1 = (0,0,1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ und eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ ist $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. Denn ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$. Die Drehung $R_{H_0,\frac{\pi}{4}}$ hat die folgende Matrixdarstellung in der kanonische Basis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(R_{H_0,\theta}) &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_{H_0,\theta}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 1.4.38. *Jede lineare spezielle Isometrie in $SO_3(\mathbb{R})$ ist eine Drehung um eine Gerade.*

Beweis. Sei $A \in SO_3(\mathbb{R})$. Das charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$ hat Grad 3 so dass, es eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. Das bedeutet dass A einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat, und da A orthogonal ist, sind die mögliche Eigenwerte ± 1: $Av = v$ oder $Av = -v$. Die Ebene $H_0 = \langle v \rangle^\perp$ ist auch A-invariant, so dass $A_{|H_0}$ entweder eine lineare Drehung oder eine lineare Spiegelung ist. Wenn $Av = v$, dann $\det(A_{|H_0}) = 1$ so dass $A_{|H_0}$ eine Drehung ist. Das zeigt dass A eine Drehung um die Gerade $\langle v \rangle$ ist. Wenn $Av = -v$, dann ist $\det(A_{|H_0}) = -1$ so dass $A_{|H_0}$ eine Spiegelung ist. Dann ist $A_{|H_0}$ diagonalisierbar durch eine orthonormale Basis von Eigenvektoren u, w so dass $Au = u$ und $Aw = w$. Wir wissen auch dass $Av = -v$, weil $\det(A_{|H_0}) = -1$. Wir sehen denn dass A die Drehung mit Winkel π um die Gerade $\langle u \rangle$ ist. □

In vielen praktischen Fällen ist es wichtig, Rotationen zu parametrisieren: zum Beispiel in der Luft- und Raumfahrt oder in Computerspielen. Ein klassischer Weg dazu sind die sogenannten Euler-Winkel: Sie besagen, dass jede Drehung eine Zusammensetzung aus drei Drehungen um die Koordinatenachse ist. Drehungen um diese Koordinatachsen haben die Form

$$R^x_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, R^y_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, R^z_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4.39. *Jede $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ist ein Produkt $A = R^x_\alpha \cdot R^y_\beta \cdot R^z_\gamma$ für manche α, β, γ.*

Beweis. Wir bemerken zuerst eine Eigenschaft von ebene Drehungen: für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^2, w \neq 0$ und jede Gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch 0 können wir eine ebene Drehung R_θ finden so dass $R_\theta w \in L$. Das ist geometrisch klar und wir lassen ein Beweis mit Formeln als Hausaufgabe.

Sei nun $v = (v_x, v_y, v_z)^t \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit Norm $\|v\| = 1$. Wir können eine Drehung $R^x_{\alpha'}$ um die x-Achse finden so dass $R^x_{\alpha'} v \in \{y = 0\}$: es reicht α' zu finden, so dass die Ebene Drehung mit Winkel α' den Vektor $(v_y, v_z)^t$ in der Gerade $\{y = 0\}$ bringt. Mit eine ähnliche Begründung können wir β' finden so dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v \in \{x = 0\}$, und dann $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v \in \{x = y = 0\}$. Wir haben $\|R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v\| = \|v\| = 1$, so dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = e_3$ oder $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = -e_3$. Im zweiten Fall, können wir eine Drehung R^y_π anwenden, so dass $R^y_\pi R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = R^y_{\pi+\beta'} R^x_{\alpha'} v = e_3$.

Sei nun $A \in SO_3(\mathbb{R})$: Mit dem vorherigen Verfahren, können wir α', β' finden so dass die dritte Spalte von $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A$ der Vektor e_3 ist. Wir haben im Beweis von der Proposition 1.4.38 gesehen, dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A$ eine Drehung um die z-Achse ist: $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A = R^z_\gamma$ für ein γ. Dann $A = R^x_{-\alpha'} R^y_{-\beta'} R^z_\gamma$. □

Das bedeutet dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to SO_3(\mathbb{R}), \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R^x_\alpha \cdot R^y_\beta \cdot R^z_\gamma$$

surjektiv ist: sie ist eine Parametetrisierung von $SO_3(\mathbb{R})$. Diese Parametrisierung hat jedoch einige Nachteile, die in der Praxis zu Problemen führen: die so genannte "Gimbal-Lock". Dies geschah tatsächlich während der Apollo 11-Mission! Auf Wikipedia finden Sie mehr darüber.

Mathematisch lässt sich ein Beispiel für Gimbal-Lock wie folgt darstellen: sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann

$$R^x_\alpha \cdot R^y_{-\frac{\pi}{2}} \cdot R^z_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das ist unabhängig von α. So kann sich α in einem eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$ bewegen, aber dieser eindimensionale Raum wird durch die Parametrisierung auf einen einzigen Punkt

zusammengezogen. Dieses Problem wird nicht dadurch gelöst, dass man eine andere Parametrisierung mit Winkeln wählt: es kann gezeigt werden, dass jede Parametrisierung von $SO_3(\mathbb{R})$ mit Winkeln diese Art von Verhalten zeigt: es hängt von der Topologie von $SO_3(\mathbb{R})$ ab.

Um dieses Problem zu vermeiden, bräuchte man eine Möglichkeit, $SO_3(\mathbb{R})$ ohne Winkel zu parametrisieren. Es gibt einen Weg, dies zu tun, der durch ein überraschendes mathematisches Konzept gegeben ist: die Quaternionen.

Sie haben ihren Ursprung in der reinen Mathematik, werden aber heute bei der Programmierung von Videospielen und bei der Beförderung von Raketen ins All verwendet. Wir werden etwas über Quaternionen gegen Ende des Kurses sehen, je nach Zeit [2].

1.4.3 Volumen

In der Analysis sieht man, dass das Volumen einer hinreichend schönen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1 \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man dies die Länge von D, ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$, so nennt man dies die Flächeninhalt von D. Was bedeutet "hinreichend schön"? Das hängt von der Integrationstheorie ab, die wir wählen. Wenn wir das Riemannsche Integral wählen, dann können wir D als eine begrenzte Teilmenge D betrachten, deren Rand ∂D das Maß Null hat. Wenn wir das Lebesgue-Integral wählen, können wir D als eine beliebige messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ betrachten. Das ist für uns nicht sehr wichtig, da wir uns auf sehr schöne Fälle beschränken werden: einer davon sind n-Parallelogramme

Definition 1.4.40 (n-Parallelogramm)**.** Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Das durch diese Vektoren definierte n-Parallelogramm ist

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \mid t_i \in [0,1]\}$$

Beispiel 1.4.41. Das Parallelogram von den kanonische Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ ist

$$P(e_1, \dots, e_n) = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in [0,1]\} = [0,1]^n$$

Wir wissen dass $\mathrm{Vol}([0,1]^n) = 1$.

Lemma 1.4.42. *Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Das Volumen vom n-Parallelogram $P(v_1, \dots, v_n)$ ist*

$$\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1 | \dots | v_n)|$$

Hier ist $(v_1 | \dots | v_n)$ die Matrix, die die v_i als Spaltenvektoren hat.

Beweis. Sei $A = (v_1 | \dots | v_n)$. Wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, dann ist $\det(v_1 | \dots | v_n) = 0$. Wir sehen auch dass $P(v_1, \dots, v_n)$ in dem echten Untervektorraum $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ enthalten ist, und da $\mathrm{Vol}(V) = 0$, sehen wir dass $\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = 0$.

Wenn $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist A invertierbar, und wir sehen dass $P = P(v_1, \dots, v_n) = A([0,1]^n)$. Dann zeigt der Transformationssatz für Integrale dass

$$\mathrm{Vol}(P) = \int_{A([0,1]^n)} 1 dx_1 \dots dx_n = \int_{[0,1]^n} |\det A| dx_1 \dots dx_n = |\det A| \cdot \int_{[0,1]^n} dx_1 \dots dx_n = |\det A|.$$

□

[2] wir sammeln coole Sachen, die wir am Ende des Kurses zeigen wollen, also ist es sehr empfehlenswert, bis zum Ende zu bleiben

Mit der Transformationsformel für Integrale können wir auch Folgendes beweisen:

Lemma 1.4.43. *Sei $f(x) = Ax + v$ eine affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Diese Transformation erhält die Volumina nur dann, wenn $|\det A| = 1$.*

Beweis. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein hinreichend schöner Integrationsbereich, wie zuvor beschrieben. Unter Verwendung des Transformationssatzes für Integrale sehen wir wie zuvor, dass

$$\mathrm{Vol}(f(D)) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(D)$$

so dass, wenn $|\det A| = 1$, denn $\mathrm{Vol}(f(D)) = \mathrm{Vol}(D)$. Andererseits, nehmen wir D so dass $\mathrm{Vol}(D) \neq 0$ (z.B. $D = [0,1]^n$): wenn $\mathrm{Vol}(f(D)) = \mathrm{Vol}(D)$, denn $|\det A| = 1$. □

Remark 1.4.44. Insbesondere erhalten Isometrien Volumina.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 21.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Umfang und Flächeninhalt von Polygone

Wir beschränken uns nun auf Polygone in zwei Dimensionen. Ein Polygon ist eine zweidimensionale Figur, die durch einen geschlossenen Streckenzug erhalten wird. Wir geben eine formale Definition:

Definition 1.4.45 (Polygon)**.** Ein Polygon ist gegeben durch eine Folge von mindestens 3 geordneten und paarweise verschiedenen Punkten $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$, so dass keine drei aufeinanderfolgenden Punkte kollinear sind (Wir betrachten hier P_{n-1}, P_n, P_1 und P_n, P_1, P_2 als aufeinanderfolgende Punkte). Wir setzen außerdem voraus, dass sich die Segmente $[P_1, P_2], \ldots, [P_{n-1}, P_n], [P_n, P_1]$ höchstens in den Punkten P_i treffen.

Die Punkte P_i sind die Ecken der Polygone und die Strecken $[P_1, P_2], \ldots, [P_n, P_{n+1}]$ sind die Seiten des Polygons. Der Winkel des Polygons an einem Scheitelpunkt P_i ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren $P_{i-1} - P_i, P_{i+1} - P_i$.

Definition 1.4.46 (Umfang und Flächeninhalt eines Polygons)**.** Sei A ein Polygon mit Ecken $P_1, \ldots, P_n$. Der Umfang von P ist

$$P(A) = d(P_1, P_2) + \cdots + d(P_{n-1}, P_n) + d(P_n, P_1)$$

Sei S die Vereinigung aller Seiten des Polygons. Dann kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \subseteq S$ aus zwei zusammenhängenden Komponenten besteht, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Der Flächeninhalt $F(A)$ von A ist der Flächeninhalt der begrenzten Region.

Bemerkung 1.4.47. Die Tatsache, dass S die Ebene in zwei Regionen trennt, eine begrenzte und eine unbegrenzte, ist ein Spezialfall des Jordan-Kurvensatzes. Wir werden ihn in unserem Kurs nicht beweisen.

Beispiel 1.4.48 (Dreieck)**.** Ein Dreieck ist ein Polygon T mit drei Ecken $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$. Diese Ecken sind drei nicht-kollineare Punkte. Der Umfang von T ist

$$P(T) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + d(P_2, P_3)$$

Die typische Methode zur Berechnung den Flächeninhalt von T ist die klassische Formel

$$F(T) = \frac{1}{2} d(P_1, P_2) \cdot d(P_3, L(P_1, P_2))$$

Dabei ist $d(P_1, P_2)$ die Länge einer Seite des Dreiecks und $d(P_3, L(P_1, P_2))$ der Abstand von der gegenüberliegender Ecke der Gerade, die von dieser Seite aufgespannt wird. Die Fläche von T ist auch die Hälfte der Fläche der Parallelogramme $P(P_1 - P_3, P_2 - P_3)$ ist:

$$F(T) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \right|$$

aber wir könnten auch die Parallelogramme $P(P_1 - P_2, P_3 - P_2)$ oder $P(P_2 - P_1, P_3 - P_1)$ betrachten.

Nun wollen wir folgende Frage stellen: Wir betrachten alle Dreiecke mit einem festen Umfang s. Können wir die Dreiecke mit der größten Fläche finden? Dies ist das erste Beispiel für das isoperimetrische Problem, ein klassisches und wichtiges Problem in der Mathematik. Bei dieser Art von Problemen ist die Lösung tendenziell symmetrisch, wie es auch in diesem Fall der Fall ist. Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten gleich lang sind.

Satz 1.4.49. *Ein gleichseitiges Dreieck hat von allen Dreiecken mit gleichem Umfang die größte Fläche*

Beweis. Sei $s > 0$ und sei T ein Dreieck mit die größte Fläche, von allen Dreiecken mit Umfang s. Seien A, B, C die Ecken von T. Es reicht zu zeigen dass die Länge von jede zwei Seiten gleich sein müss, wenn die Länge der verbleibenden Seite festgelegt ist. Durch eine mögliche Umbenennung der Punkte genügt es zu zeigen, dass $d(A, C) = d(B, C)$, wenn $d = d(A, B)$ festgelegt ist.

Über eine Translation können wir annehmen, dass $A = (-\frac{d}{2}, 0)$, anschließend über eine Rotation können wir annehmen, dass $B = (\frac{d}{2}, 0)$ und schließlich bis zu einer möglichen Spiegelung, können wir annehmen, dass $C = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}, y > 0$. Da es sich dabei alles um Isometrien handelt, ändern wir die Flächeninhalten und Umfänge nicht. Der Flächeninhalt von T ist

$$F(T) = \frac{1}{2} d \cdot y$$

Da d fest ist, wollen wir y über die Menge $E = \{C = (x, y) \mid d(C, A) + d(C, B) = s - d\}$ maximieren. Die Menge E ist eine Ellipse, und sie hat eine Gleichung der Form

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

für manche $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$. Insbesondere sehen wir dass y maximal ist, genau dann, wenn $x = 0$. Das bedeutet insbesondere dass $d(A, C) = d(B, C)$.

Jetzt sind wir fast fertig. Warum sind wir noch nicht fertig? Wir haben den Beweis mit der Annahme begonnen, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche existiert, und dann bewiesen, dass dieses Dreieck gleichseitig sein muss. Jetzt müssen wir zeigen, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche existiert: Dies wird durch das nächste Lemma erledigt. □

Lemma 1.4.50. *Unter allen Dreiecken mit festem Umfang gibt es eines mit der größten Fläche.*

Beweis. Dieser Beweis ist interessant, weil wir nicht zeigen werden, wie man das Dreieck mit maximaler Fläche konstruiert, sondern nur, dass eines existiert. Aber wir müssen es nicht konstruieren: Sobald wir wissen, dass es eines gibt, zeigt der vorherige Beweis, dass es gleichseitig ist.

Erstens können wir uns durch eine Translation auf alle Dreiecke mit einer Ecke im 0 beschränken. Wir können alle diese Dreiecke durch die Menge

$$S = \{(0, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid d(0, B) + d(0, C) + d(B, C) = s\}$$

parametrisieren, wobei s der gemeinsamer Umfang ist von alle den Dreiecken ist. Diese Menge is abgeschlossene, weil die Funktion $(0, A, B) \mapsto d(0, B) + d(0, C) + d(B, C)$ stetig ist. Außerdem ist diese Menge auch beschränkt, weil $d(0, B), d(0, C) \leq s$. Das bedeutet dass S kompakt ist. Wir betrachten nun die Flächeninhalt Funktion:

$$F \colon S \to \mathbb{R}, \qquad (0, B, C) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Vol}(P(B, C))$$

wobei $P(B, C)$ der Parallelogram von B und C ist. Wir wissen dass $F(B, C) = 0$ falls $0, B, C$ kollinear sind, und dass $F(B, C)$ die Fläche des Dreiecks $0, B, C$ ist, falls $0, B, C$ nicht kollinear sind. Das Volumen von $P(B, C)$ wird durch den Betrag einer Determinante angegeben, und die Determinante ist eine Polynomfunktion. Dies zeigt, dass F stetig ist. Dann hat F ein Maximum auf der Menge S.

Abschließend müssen wir nur beweisen, dass F ein Maximum in einem Dreieck hat. Aber wenn F ein Maximum hat, bei dem $0, B, C$ kollinear sind, dann ist das Maximum von F Null, sodass F Null sein muss. Dies ist jedoch unmöglich, da beispielsweise das gleichseitige Dreieck mit dem Umfang s eine Fläche ungleich Null hat. □

In sehr ähnlicher Weise kann man die folgende Verallgemeinerung beweisen:

Definition 1.4.51 (Regelmäßiges Polygon)**.** Ein regelmäßiges Polygon ist ein Polygon, dessen Seiten alle die gleiche Länge haben und dessen Winkel an jedem Eckpunkt gleich sind

Satz 1.4.52. *Ein regelmäßiges Polygon hat die maximale Fläche aller Polygone mit einer festen Anzahl von Seiten und einem festen Umfang.*

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 26.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Kapitel 2

Projektive Geometrie

2.1 Der projektive Raum

Definition 2.1.1 (Projektive Raum)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \geq 0$. Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist die Menge

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n \setminus \{0\})/\sim = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K} \text{ nicht alle } 0\}/\sim$$

wobei $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ Die Dimension von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist $\dim \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = n$.

Wir haben eine Projektion

$$\pi \colon \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

und wir schreiben $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \pi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Wir schreiben hier die Elementen von KK^n und $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ als Zeilenvektoren, weil es einfacher ist, aber man soll sie als Spaltenvektoren betrachten.

Beispiel 2.1.2. Wir haben $[0, 1, 2] = [0, 3, 6]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, weil $(0, 3, 6) = 3 \cdot (0, 1, 2)$.

Bemerkung 2.1.3. Vorsicht! $[0, 0, \ldots, 0]$ ist nicht definiert!

Definition 2.1.4 (Projektivisierung von Vektorräume)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Projektivisierung von V ist die Menge

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$$

wobei $v \sim w$ genau dann wenn $w = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Wenn V endlich-dimensional ist, dann definieren wir $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$. $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ heißt auch die projektive Gerade und $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ die projektive Ebene.

Wir haben auch hier eine Projektion $\pi \colon V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ und wir schreiben $[v] = \pi(v)$, für $v \neq 0$. Wir bemerken dass $[0]$ nicht definiert ist.

Beispiel 2.1.5. Wir sehen dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Bemerkung 2.1.6. Wir sehen dass $\mathbb{P}(0) = \emptyset$. Insbesondere können wir $\mathbb{P}^{-1}(\mathbb{K}) = \emptyset$ definieren. Wir setzen auch $\dim \emptyset = -1$.

Bemerkung 2.1.7. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Man kann leicht zeigen (Hausaufgabe!) dass die folgende Aussage äquivalent sind:

1. $[v] = [w]$ in $\mathbb{P}(V)$.
2. v, w sind linear abhängig in V
3. $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ als Untervektorräume von V.

Insbesondere, sehen wir dass $\mathbb{P}(V)$ eine natürliche Interpretation hat:

$$\mathbb{P}(V) = \{ \text{ Untervektorräume mit Dimension 1 in V}\}$$

Insbesondere

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \{ \text{ Geraden durch 0 in } \mathbb{K}^n\}$$

Beispiel 2.1.8. Die Menge $\mathbb{P}^0(\mathbb{K}) = \{[1]\}$ ist ein Punkt: es gibt nur eine Gerade in $\mathbb{K}$.

Bemerkung 2.1.9. Vorsicht! Die Summe von zwei Punkte in $\mathbb{P}(V)$ ist nicht definiert! Man könnte versuchen eine Summe als

$$[v] + [w] \colon = [v + w]$$

zu definieren. Das ist aber nicht wohldefiniert, weil im Allgemeinen haben wir, dass $[v + w] \neq [v' + w']$, wenn $[v] = [v'], [w] = [w']$. Zum Beispiel, in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sehen wir, dass

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \text{ aber } \begin{bmatrix}1+0\\0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+0\\0+1\end{bmatrix}$$

2.2 Projektive Unterräume

Bemerkung 2.2.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir haben die zwei projektive Räume $\mathbb{P}(W), \mathbb{P}(V)$ und auch eine Abbildung

$$\mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V), \qquad [w] \mapsto [w]$$

Auf der linken Seite meinen wir $[w]$ als Punkt in $\mathbb{P}(W)$ und auf der rechten Seite $[w]$ als Punkt in $\mathbb{P}(V)$. Dies ist sinnvoll, da w sowohl in W als auch in V ein Nicht-Null-Vektor ist. Diese Abbildung ist wohldefiniert und injektiv: $[w] = [w']$ in $\mathbb{P}(W)$ genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ so dass $w = \lambda \cdot w'$ existiert, und das ist äquivalent zu $[w] = [w']$ in $\mathbb{P}(V)$. Wir können denn $\mathbb{P}(W)$ als Teilmenge von $\mathbb{P}(V)$ betrachten:

$$\mathbb{P}(W) = \{[w] \in \mathbb{P}(V) \,|\, w \in W\}$$

Definition 2.2.2 (Projektive Unterraum)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ ist eine Teilmenge der Form $\mathbb{P}(W)$ für ein Untervektorraum $W \subseteq V$. Wenn $\dim \mathbb{P}(W) = m$, dann sagen wir dass $\mathbb{P}(W)$ ein m-dimensionale projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ ist.

Insbesondere, wenn $\dim \mathbb{P}(W) = 1$ sagen wir, dass $\mathbb{P}(W)$ eine projektive Gerade in $\mathbb{P}(V)$ ist, und wenn $\dim \mathbb{P}(W) = 2$ sagen wir, dass $\mathbb{P}(W)$ eine projektive Ebene in $\mathbb{P}(V)$ ist.

Bemerkung 2.2.3. Sei $\pi\colon V\setminus\{0\}\to\mathbb{P}(V)$ die Projektion und sei W ein Untervektorraum. Man kann leicht zeigen (Hausaufgabe!),dass $\mathbb{P}(W)=\pi(W\setminus\{0\})$ und außerdem $\pi^{-1}(\mathbb{P}(W))=W\setminus\{0\}$: das bedeutet dass

$$[v]\in\mathbb{P}(W)\iff v\in W$$

für alle $v\in V\setminus\{0\}$. Insbesondere sehen wir, dass wenn $U\subseteq V$ ein anderer Untervektorraum ist, dann

$$\mathbb{P}(U)\subseteq\mathbb{P}(W)\iff U\subseteq W$$

so dass $\mathbb{P}(U)=\mathbb{P}(W)$ genau dann, wenn $U=W$.

Beispiel 2.2.4. Die Ebene $H=\{x+y+z=0\}\subseteq\mathbb{K}^3$ ist ein Untervektorraum, so dass $\mathbb{P}(H)\subseteq\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)=\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ein projektiver Untervektorraum ist. Wir zeigen dass

$$\mathbb{P}(H)=\{[x,y,z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{K})\,|\,x+y+z=0\}$$

Zuerst sehen wir dass die Menge an der rechte Seite wohldefiniert ist: wenn $[x',y',z']=[x,y,z]$, dann $(x',y',z')=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ für ein $\lambda\in\mathbb{K}^\times$, so dass

$$x+y+z=0\iff\lambda(x+y+z)=0\iff x'+y'+z'=0$$

Die Gleichung von dieser zwei Mengen ist nun leicht zu zeigen: $[x,y,z]\in\mathbb{P}(H)$ genau dann, wenn $(x,y,z)\in H$, und das bedeutet genau dass $x+y+z=0$.

Das kann leicht verallgemeinert werden:

Beispiel 2.2.5. Sei $A=(a_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ eine Matrix, wir betrachten den Untervektorraum $\operatorname{Ker}A\subseteq\mathbb{K}^n$. Wir sehen dass:

$$\mathbb{P}(\operatorname{Ker}A)=\{[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\,|\,Ax=0\}=\left\{\begin{bmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\,\middle|\,\begin{matrix}a_{00}x_0+\cdots+a_{0n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{m0}x_0+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{matrix}\right\}$$

Die Menge $\{[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\,|\,Ax=0\}$ ist wohldefiniert: wenn $[x]=[x']$, dann $x'=\lambda x$ für ein $\lambda\in\mathbb{K}^\times$, und $Ax'=\lambda\cdot Ax$. Das bedeutet dass $Ax=0$ genau dann, wenn $Ax'=0$. Wir sehen denn, dass $[x]\in\mathbb{P}(\operatorname{Ker}A)$, genau dann, wenn $x\in\operatorname{Ker}A$, was bedeutet $Ax=0$.

Wir werden später die Menge $\{[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\,|\,Ax=0\}$ einfach als $\{Ax=0\}\subseteq\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ bezeichnen, wenn es keine Möglichkeit der Verwechslung gibt. Wir sehen dass

$$\dim\{Ax=0\}=\dim\operatorname{Ker}A-1=(n+1)-\operatorname{rk}A-1=n-\operatorname{rk}A$$

Beispiel 2.2.6. Vorsicht! Wenn $A\in\mathbb{K}^{m\times(n+1)}$, und $b\in\mathbb{K}^m, b\neq 0$, die Menge

$$\{[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\,|\,Ax+b=0\}$$

ist nicht definiert! Denn wenn $x'=\lambda x$ für ein $\lambda\in\mathbb{K}^\times$, dann ist $Ax'+b=\lambda\cdot Ax+b$ und es ist nicht wahr, dass $Ax+b=0$, wenn und nur wenn $\lambda Ax+b=0$.

Zum Beispiel, betrachten wir $\{[x,y,z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\,|\,x+y+z=1\}$: wir sehen dass $1+0+0=1$ und $[1,0,0]=[2,0,0]$, aber $2+0+0\neq 1$.

Lemma 2.2.7. *Der Schnitt von projektive Unterräume ist ein projektiver Unterraum: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $W_i \subseteq V, i \in I$ Untervektorräume. Dann*

$$\bigcap_{i\in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} W_i)$$

Beweis. Sei $[v] \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{P}(W_i)$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Das bedeutet $v \in \mathbb{P}(W_i)$ für alle $i \in I$, und das ist äquivalent zu $v \in W_i$ für alle $i \in I$, d.h. $v \in \cap_{i\in I} W_i$. □

Definition 2.2.8 (Erzeugte projektive Unterraum)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Teilmenge. Der projektive Unterraum erzeugt von S ist

$$L(S) = \bigcap_{\mathbb{P}(W)\supseteq S} \mathbb{P}(W)$$

Bemerkung 2.2.9. Der Schnitt auf der rechten Seite ist nicht leer, da $\mathbb{P}(V) \supseteq S$. Außerdem, sehen wir dass, wenn $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum ist, $\mathbb{P}(W) \supseteq L(S) \iff \mathbb{P}(W) \supseteq S$: der projektive Unterraum $L(S)$ ist der kleinste projektive Unterraum,der S enthält.

Lemma 2.2.10. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume. Denn*

$$L(\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Beweis. Sei $U \subseteq V$ der Untervektorraum so dass $L(\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)) = \mathbb{P}(U)$. Wir sehen dass $\mathbb{P}(U) \supseteq \mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2)$ so dass $U \supseteq W_1 \cup W_2$: das bedeutet $U \supseteq W_1 + W_2$ und denn $\mathbb{P}(U) \supseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$. Andererseits, $\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq \mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2)$, so dass $\mathbb{P}(W_1 + W_2) \supseteq \mathbb{P}(U)$. □

Proposition 2.2.11 (Dimensionsformel)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei endlich-dimensionale projektive Unterräume. Es gilt, dass*

$$\dim L(\Pi_1, \Pi_2) + \dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2$$

Beweis. Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei Untervektorräume so dass $\Pi_1 = \mathbb{P}(W_1), \Pi_2 = \mathbb{P}(W_2)$. Dann $L(\Pi_1, \Pi_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2), \Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ und die Dimensionsformel für Untervektorräume zeigt dass $\dim \mathbb{P}(W_1 + W_2) + \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim W_1 \cap W_2 - 2 = \dim W_1 + \dim W_2 - 2 = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2)$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 28.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Bemerkung 2.2.12. Dies unterscheidet sich von der Situation in der affinen Geometrie: Die analoge Formel für affine Unterräume M_1, M_2 ist nur gültig, wenn $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Hier brauchen wir uns um diesen Fall nicht zu kümmern. Hierin liegt der grundlegende Unterschied zwischen affiner Geometrie und projektiver Geometrie: Wir wollen das an einigen Beispielen sehen.

Beispiel 2.2.13. Seien $L \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eine Gerade und $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eine Hyperebene: das bedeutet, dass $\dim H = n-1$. Wir betrachten den erzeugten Unterraum $L(L, H)$: dieser müss H enthälten, so dass $\dim L(L, H) \geq n-1$. Wir haben zwei Möglichkeiten: entweder $\dim L(L, H) = n$, so dass $L(L, H) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, oder $\dim L(L, H) = n-1$, so dass $L(L, H) = H$. Der zweite Fall passiert genau dann, wenn $L \subseteq H$. Die Dimensionsformel ergibt

$$\dim L \cap H = \dim L + \dim H - \dim L(L, H) = 1 + n - 1 - \dim L(L, H) = n - \dim L(L, H)$$

und das bedeutet

$$L \cap H = \begin{cases} \text{ein Punkt}, & \text{falls } L \not\subseteq H \\ L, & \text{falls } L \subseteq H \end{cases}$$

Insbesondere sind eine Gerade und eine Hyperebene in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ nie disjunkt.

Beispiel 2.2.14. Die Hyperebene in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sind genau die Geraden. Das vorheriges Beispiel zeigt dass zwei unterschiedliche projektive Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ treffen sich in einem Punkt. Es gibt keine disjunkte Geraden wie die parallele Geraden im affinen Raum $\mathbb{K}^2$.

Wir können das auch mit Gleichungen beweisen: wir betrachten zwei Geraden $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ mit

$$L_i = \{a_i x + b_i y + c_i z = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \qquad i = 1, 2$$

mit $(a_i, b_i, c_i) \neq 0$. Dann

$$L_1 \cap L_2 = \begin{Bmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = 0 \end{Bmatrix} = \mathbb{P}\left(\ker \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right)$$

Die Matrix im letzten Ausdruck hat Zeilen ungleich Null, so dass sie den Rang 1 oder 2 haben kann. Wenn sie den Rang 1 hat, dann sind die beiden Zeilen das Vielfache einer anderen, und das bedeutet, dass $L_1 = L_2$. Wenn er den Rang 2 hat, dann hat der Kern die Dimension 1, so dass seine Projektivisierung ein Punkt ist.

2.3 Affine Karten und Fernelemente

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

Beispiel 2.3.1 (Die Projektive Ebene und Fernpunkte)**.** Wir betrachten die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \{[x_0, x_1, x_2] \,|\, (x_0, x_1, x_2) \neq 0\}$ und die Gerade $L_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \,|\, x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. das Komplement dieser Gerade ist

$$U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \,|\, x_0 \neq 0\}$$

Sei $[x_0, x_1, x_2] \in U_0$. Da $x_0 \neq 0$, wissen wir, dass

$$[x_0, x_1, x_2] = \left[\frac{x_0}{x_0}, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right] = \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right]$$

Dies zeigt, dass es natürliche Abbildungen zwischen U_0 und $\mathbb{K}^2$ gibt:

$$\begin{aligned} U_0 &\to \mathbb{K}^2 & [x_0, x_1, x_2] = \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \\ \mathbb{K}^2 &\to U_0 & (x, y) &\mapsto [1, x, y] \end{aligned}$$

und es lässt sich leicht zeigen dass diese Abbildungen inverse zueinander sind. Auf diese Weise können wir U_0 mit dem affinen Raum $\mathbb{K}^2$ identifizieren so dass $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = U_0 \sqcup L_0$ die Vereinigung einem affinen Raum mit einer projektive Gerade ist. Wir identifizieren $\mathbb{K}^2$ weiterhin mit U_0 und betrachten zwei verschiedene parallele affine Geraden in $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{K}^2$:

$$M_i = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by + c_i = 0\} \qquad i = 1, 2$$

mit $(a, b) \neq 0$ und $c_1 \neq c_2$. Wir wissen, dass sich diese Geraden nicht in $\mathbb{K}^2$ treffen. Betrachten wir nun die Geraden als Teilmenge von $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} M_i &= \{[1, x, y] \in U_0 \,|\, ax + by + c_i = 0\} = \\ &\left\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \,|\, x_0 \neq 0, a\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + b\left(\frac{x_2}{x_0}\right) + c_i = 0\right\} \\ &= \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \,|\, x_0 \neq 0,\ ax_1 + bx_2 + c_i x_0 = 0\} \\ &= \overline{M}_i \cap U_0 \end{aligned}$$

wobei

$$\overline{M}_i := \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \,|\, ax_1 + bx_2 + c_i x_0 = 0\}$$

projektive Geraden sind. Die projektive Gerade $\overline{M}_i$ heißt die **projektive Abschluss** von der affine Gerade M_i. Wir können die affinen Geraden M_i als Schnittmenge der projektiven Geraden $\overline{M}_i$ mit U_0 betrachten. Wir wissen auch, dass sich die beiden projektiven Geraden $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ irgendwo treffen müssen, und der Schnittpunkt muss sich in $L_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \,|\, x_0 = 0\}$ finden:

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap L_0 = \left\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \,|\, x_0 = 0, ax_1 + bx_2 = 0\right\} = \{[0, b, -a]\}$$

Wir bemerken dass der Punkt $[b, -a] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ entspricht den Untervektorraum $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by = 0\}$ von $\mathbb{K}^2$. Dieser ist genau der Untervektorraum assoziiert zu den parallele Geraden $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{K}^2$.

Man kann leicht sehen, dass jeder Punkt auf L_0 auf diese Weise entsteht.

Üblicherweise wird dies wie folgt formuliert: Wir können die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ als Vereinigung eines affinen Raums $U_0 \cong \mathbb{K}^2$ und einer projektiven Linie L_0 betrachten, die **Ferngerade** (unendlich fern Gerade) genannt wird. Zwei verschiedene affine parallele Linien in U_0 treffen sich nicht in U_0, sondern ihre **projektiven Abschlüsse** treffen sich in einem Punkt der Ferngerade. Diesen Punkt nennt man den **Fernpunkt** für die beiden parallelen affinen Geraden. Die Ferngerade ist die Vereinigung aller Fernpunkte.

Wir können dies auf beliebige Dimensionen verallgemeinern:

Definition 2.3.2 (Standard affine Karten)**.** Sei $n \geq 0$. Die standard affine Karte U_0 auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \{[x_0, \ldots, x_n]\}$ ist die Teilmenge

$$U_0 = \{[x_0, \ldots, x_n \,|\, x_0 \neq 0]\}$$

Die projektive Hyperebene $H_0 = \{[x_0, \ldots, x_n] \,|\, x_0 = 0\}$ ist die Fernhyperebene bezüglich die affine Karte U_0. Man hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \sqcup H_0$.

Die Standard affine Karte U_0 ist mit dem affinen Raum $\mathbb{K}^n$ identifiziert, durch die Bijektionen

$$\begin{aligned} U_0 &\to \mathbb{K}^n, & [x_0, \ldots, x_n] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ \mathbb{K}^n &\to U_0, & (y_1, \ldots, y_n) &\mapsto [1, y_1, \ldots, y_n] \end{aligned}$$

Beispiel 2.3.3 (Die Projektive Gerade und der Fernpunkt)**.** In der projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ der Fernhyperebene H_0 ist nur ein Punkt: $U_0 = \{[1, x] \,|\, x \in \mathbb{K}\}$ und $H_0 = \{[0, 1]\}$. Der Punkt $[0, 1]$ ist auch der Fernpunkt genannt, und man schreibt auch manchmal $[0, 1] = \infty$. Dann haben wir eine Identifizierung $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_0 \sqcup H_0 = \mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$.

Mit dieser Identifikation von U_0 und $\mathbb{K}^n$ im Hinterkopf können wir auch von affinen Unterräumen in U_0 sprechen: das sind die Teilmengen der Form

$$M = \left\{ [1, y_1, \ldots, y_n] \in U_0 \,|\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + b = 0 \right\}$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und ein $b \in \mathbb{K}^m$. Wir können nun M als Teilmenge von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ betrachten:

$$\begin{aligned} M &= \left\{ [1, y_1, \ldots, y_n] \in U_0 \,|\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + b = 0 \right\} = \left\{ \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right] \in U_0 \,|\, A \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_0} \end{pmatrix} + b = 0 \right\} \\ &= \left\{ [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, x_0 \neq 0, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + x_0 b = 0 \right\} \\ &= \left\{ [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, x_0 \neq 0, \quad (b|A) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} = \mathbb{P}(\ker(b|A)) \cap U_0 \end{aligned}$$

Definition 2.3.4 (Projektive Abschluss)**.** Sei $M \subseteq U_0$ ein affiner Unterraum wie oben. Wir nehmen an, dass $M \neq \emptyset$. Die projektive Abschlüss von M in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist der projektive Unterraum

$$\overline{M} = \left\{ [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + x_0 b = 0 \right\} = \mathbb{P}(\ker(b|A))$$

Wenn $M = \emptyset$ definieren wir $\overline{M} = \emptyset$.

Diese Beschreibung hängt a priori nicht nur von M, sondern auch von der Matrix A und dem Vektor b ab. Dass sie nur von M abhängt, zeigen wir im folgenden Lemma:

Proposition 2.3.5. *Seien $M \subseteq U_0$ und $\overline{M} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ wie oben. Dann*

1. *$\overline{M} \cap U_0 = M$ und $\overline{M} \cap H_0 = \{[0, x_1, \ldots, x_n] \,|\, A(x_1, \ldots, x_n)^t = 0\} = \{[0, x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, x \in \operatorname{Ker} A\}$.*

2. *$\overline{M}$ abhängt nur von M und nicht von der Matrix A und dem Vektor b.*

3. $\dim M = \dim \overline{M}$.

4. *Wenn $M \neq \emptyset$, dann $\overline{M} \not\subseteq H_0$. Andererseits, sei $L \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ein projektiver Unterraum so dass $L \not\subseteq H_0$. Dann ist $M = L \cap U_0$ ein affiner Unterraum in U_0 und $L = \overline{M}$.*

Beweis. 1. Dies folgt aus der Definition.

2. Da $\overline{M} = (\overline{M} \cap U_0) \cup (\overline{M} \cap H_0)$, reicht es zu zeigen, dass $\overline{M} \cap U_0$ und $\overline{M} \cap H_0$ nur abhängig von M sind. Punkt (1) zeigt, dass $\overline{M} \cap U_0 = M$ nur abhängig von M ist. Punkt (1) zeigt auch, dass $\overline{M} \cap L_0 = \{[0, x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,|\, x \in \operatorname{Ker} A\}$ und $\operatorname{Ker} A$ is der assoziierte Untervektorraum zu M. Insbesondere ist $\operatorname{Ker} A$ nur abhängig von M.

3. Wenn $M = \emptyset$, ist das klar. Da $M \neq \emptyset$, sehen wir dass $\operatorname{rk}(b|A) = \operatorname{rk}(A)$. Dann
$$\dim \overline{M} = \dim \mathbb{P}(\operatorname{Ker}(b|A)) = n - \operatorname{rk}(b|A) = n - \operatorname{rk}(A) = \dim \operatorname{Ker} A = \dim M$$

4. Wenn $M \neq \emptyset$, dann zeigt Punkt (1),dass $\overline{M} \cap U_0 = M$, so dass $\overline{M} \not\subseteq H_0$. Andererseits, sei $L \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ein projektiver Unterraum, so dass $L \not\subseteq H_0$. Dieser Unterraum hat die Form $L = \mathbb{P}(\operatorname{Ker} C)$ für eine Matrix C. Wenn b die erste Spalte von C ist, dann können wir $C = (b|A)$ schreiben, für eine Matrix A. Dann ist
$$M = L \cap U_0 = \mathbb{P}(\operatorname{Ker}(b|A)) \cap U_0 = \{[1, y] = [1, y_1, \ldots, y_n] \,|\, Ay + b = 0\}$$
ein, nicht leerer affiner Unterraum von U_0 und $\overline{M} = \mathbb{P}(\operatorname{Ker}(b|A)) = L$.

□

Bemerkung 2.3.6. Punkt 1 zeigt, dass, wenn $M \subseteq U_0$ ein affiner Unterraum ist, die Schnittmenge $\overline{M} \cap H_0$ nur vom zugehörigen Vektorraum zu M abhängt, nicht von M selbst.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 03.12.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Beispiel 2.3.7. Wir betrachten $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \subseteq \mathbb{P}^3\}$ und die affine Gerade
$$L = \{[1, x, y, z] \in U_0 \,|\, x + y + z = 0,\ y - 1 = 0\}$$
Die projektive Abschluss ist
$$\overline{L} = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_0 = 0\}$$

Bisher haben wir immer mit dem affinen Diagramm U_0 gearbeitet, aber es gibt nichts Besonderes an der Koordinate x_0, wir hätten auch jede andere Koordinate x_i nehmen können

Definition 2.3.8 (Standard affine Karten)**.** Die standard affine Karten in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sind
$$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \,|\, x_i \neq 0\} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n$$
Die Fernhyperebene bezüglich U_i ist $H_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \,|\, x_i = 0\}$.

Die Standard affine Karte U_i ist mit dem affinen Raum $\mathbb{K}^n$ identifiziert, durch die Bijektionen
$$\begin{aligned} U_i \to \mathbb{K}^n, &\qquad [x_0, \ldots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_0}}, \ldots \frac{x_n}{x_0}\right) \\ \mathbb{K}^n \to U_i, &\qquad (y_0, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_n) \mapsto [y_0, y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots y_n] \end{aligned}$$
und dann können wir wie bei U_0 vorgehen.

Bemerkung 2.3.9. Wir sehen dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$, weil wenn $P = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ es gibt mindestens ein i so dass $x_i \neq 0$. Wir können uns $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ also auch als Vereinigung von affinen Räumen vorstellen. Diese Sichtweise macht $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ zu einer Mannigfaltigkeit in der Differentialgeometrie und zu einer algebraischen Varietät in der algebraischen Geometrie. Wir kratzen hier nur an der Oberfläche.

2.4 Projektive Abbildungen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten nun endlich-dimensionale projektive Räume.

Definition 2.4.1 (Projektivisierung einer linearen Abbildung)**.** Sei $\varphi\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Die Projektivisierung von φ ist die Abbildung

$$\mathbb{P}(\varphi)\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W), \qquad [v] \mapsto [\varphi(v)].$$

Remark 2.4.2. Diese Abbildung ist wohldefiniert: da φ injektiv ist, wissen wir dass $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, so dass $\varphi(v) \neq 0$, falls $v \neq 0$. Außerdem, wenn $[v] = [v']$ in $\mathbb{P}(V)$, dann $v' = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, so dass $\varphi(v') = \lambda \cdot \varphi(v)$ und $[\varphi(v')] = [\varphi(v)]$.

Lemma 2.4.3. *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung.*

1. $\mathbb{P}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$.
2. *Wenn $\psi\colon U \to W$ eine andere injektive lineare Abbildungen ist, dann*
$$\mathbb{P}(\varphi \circ \psi) = \mathbb{P}(\varphi) \circ \mathbb{P}(\psi)$$
3. $\mathbb{P}(\varphi)$ *ist invertierbar, genau dann, wenn φ invertierbar ist. In diesem Fall, $\mathbb{P}(\varphi)^{-1} = \mathbb{P}(\varphi^{-1})$.*
4. $\mathbb{P}(\varphi)$ *ist immer injektiv.*
5. *Wenn $\varphi'\colon V \to W$ eine andere injektive lineare Abbildung ist, dann $\mathbb{P}(\varphi) = \mathbb{P}(\varphi')$ genau dann, wenn $\varphi' = \lambda \cdot \varphi$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.*
6. *Wenn $V' \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, dann $\mathbb{P}(\varphi)(\mathbb{P}(V')) = \mathbb{P}(\varphi(V))$. Wenn $W' \subseteq W$ ein Untervektorraum ist, dann $\mathbb{P}(\varphi)^{-1}(\mathbb{P}(W')) = \mathbb{P}(\phi^{-1}(W'))$.*

Beweis.

1. Seien $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ so dass $[\varphi(v_1)] = [\varphi(v_2)]$. Dann exisiert $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ so dass $\varphi(v_1) = \lambda \cdot \varphi(v_2) = \varphi(\lambda \dot{v}_2)$. Da φ injektiv ist, sehen wir dass $v_1 = \lambda \cdot v_2$ so dass $[v_1] = [v_2]$. Das zeigt dass $\mathbb{P}(\varphi)$ injektiv ist.
2. $\mathbb{P}(\mathrm{id}_V)([v]) = [v]$ für alle $v \in \mathbb{P}(V)$.
3. $\mathbb{P}(\varphi \circ \psi)([u]) = [\varphi(\psi(u))] = (\mathbb{P}(\varphi) \circ \mathbb{P}(\psi))[u]$, für alle $[u] \in \mathbb{P}(U)$.
4. Wenn φ invertierbar ist, dann $\mathbb{P}(\varphi) \circ \mathbb{P}(\varphi^{-1}) = \mathbb{P}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \mathbb{P}(\mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(W)}$ und eine ähnliche Begründung zeigt dass $\mathbb{P}(\varphi^{-1}) \circ \mathbb{P}(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$. Andererseits, wenn $\mathbb{P}(\varphi)$ invertierbar ist, ist sie surjektiv, so dass für alle $w \in W \setminus \{0\}$ existiert $v \in V \setminus \{0\}$ so dass $[w] = [\varphi(u)]$. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ so dass $w = \lambda \cdot \varphi(u) = \varphi(\lambda \cdot u)$. Das zeigt dass $W \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{Im}\varphi$, und dann φ muss surjektiv sein. Da φ injektiv ist, muss sie invertierbar sein.
5. Wenn $\varphi' = \lambda \cdot \varphi$, dann $[\varphi'(v)] = [\lambda \cdot \varphi(v)] = [\varphi(v)]$ für alle $[v] \in \mathbb{P}(V)$. Andererseits, nehmen wir an, dass $[\varphi(v)] = [\varphi'(v)]$ für alle $[v] \in \mathbb{P}(V)$. Seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^\times$, so dass $\varphi'(v_i) = \lambda_i \varphi(v_i)$ für $i = 1, 2$. Wir wollen zeigen dass $\lambda_1 = \lambda_2$. Wir sehen dass $\varphi'(v_1 + v_2) = \varphi'(v_1) + \varphi'(v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$. Da $[\varphi'(v_1 + v_2)] =$

$[\varphi(v_1 + v_2)] = [\varphi(v_1) + \varphi(v_2)]$, existiert $\mu \in \mathbb{K}^\times$ so dass $\varphi'(v_1 + v_2) = \mu\varphi(v_1) + \mu\varphi(v_2)$. Da φ injektiv ist, sind $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$ linear unabhängig sein, und dann zeigt die Gleichung $\lambda_1\varphi(v_1) + \lambda_2\varphi(v_2) = \mu\varphi(v_1) + \mu\varphi(v_2)$, dass $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$.

Sei nun $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir haben gezeigt dass $\varphi'(v_i) = \lambda \cdot \varphi(v_i)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, so dass $\varphi' = \lambda \cdot \varphi$.

6. $\mathbb{P}(\varphi)(V') = \{[\varphi(v')] \,|\, v' \in V' \setminus \{0\}\} = \{[w'] \,|\, w' \in \varphi(V') \setminus \{0\}\} = \mathbb{P}(\varphi(V'))$, und $\mathbb{P}(\varphi)^{-1}(\mathbb{P}(W')) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \,|\, \varphi(v) \in W'\} = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \,, |\, v \in \varphi^{-1}(W')\} = \mathbb{P}(\varphi^{-1}(W'))$. □

Definition 2.4.4 (Projektive Abbildung)**.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ ist projektiv, wenn f die Form $f = \mathbb{P}(\varphi)$ hat, für eine injektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$. Eine invertierbare projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ heißt auch ein Isomorphismus. Zwei projektive Räume $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ sind isomorph wenn eine invertierbare projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ existiert.

Eine invertierbare projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ heißt eine projektive Transformation oder ein projektives Automorphismus von $\mathbb{P}(V)$. Die Menge aller projektive Transformationen von $\mathbb{P}(V)$ ist $PGL(V)$.

Lemma 2.4.5. *1. Jede projektive Abbildung ist injektiv.*

2. Die Komposition von projektive Abbildungen ist projektiv.

3. Die inverse einer invertierbare projektive Abbildung ist projektiv.

4. Die Menge $PGL(V)$ ist eine Gruppe mit der Komposition.

5. Zwei projektive Räume $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ sind isomorph, genau dann, wenn $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

Beweis. Punkte (1)-(2)-(3) folgen aus Lemma 2.4.3.

Punkt (4) folgt aus (1)-(2)-(3).

Für Punkt (5), zeigt das vorheriges Lemma, dass $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ isomorph sind, genau dann, wenn V, W isomorph sind, und das ist äquivalent zu $\dim V = \dim W$. Das ist auch äquivalent zu $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$. □

Lemma 2.4.6. *Sei $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine projektive Abbildung.*

1. *Wenn $M \subseteq \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Unterraum ist, dann ist $f(M) \subseteq \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum, mit $\dim M = \dim f(M)$ und $f_{|M}\colon M \to f(M)$ ist projektiv und invertierbar. Insbesondere ist $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{P}(V))$ ein projektiver Unterraum.*

2. *Wenn $L \subseteq \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum ist, dann ist $f^{-1}(L)$ ein projektiver Unterraum mit $\dim f^{-1}(L) = \dim L \cap \operatorname{Im} f$.*

3. *Wenn $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine Teilmenge ist, dann $f(L(S)) = L(f(S))$.*

Beweis. Punkte (1) und (2) folgen aus Lemma 2.4.3. Für Punkt (3), sei $L = f(L(S))$. Wir sehen,dass $f(L(S)) \subseteq \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum Untervektorraum ist, und $f(L(S)) \supseteq f(S)$, so dass $f(L(S)) \supseteq L$. Andererseits, $f^{-1}(L) \subseteq \mathbb{P}(V)$ ist ein projektiver Unterraum und $f^{-1}(L) \supseteq S$,so dass $f^{-1}(L) \supseteq L(S)$, und $L \supseteq f(L(S))$. □

Beispiel 2.4.7 (Projektive Transformationen von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$)**.** Eine projektive Transformation $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ hat die Form $f = \mathbb{P}(A)$ für eine invertierbare lineare Abbildung $A\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$, die durch eine invertierbare Matrix $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ gegeben ist. Wir sehen dass $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ genau dann, wenn $B = \lambda \cdot A$, für ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.Wir können denn die Menge von projektive Transformationen von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ mit der Menge

$$PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/\sim \qquad A \sim B \iff A = \lambda B \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{K}^\times$$

identifizieren. Wir bezeichnen die Klasse von $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ als $[A]$, und manchmal schreiben wir auch $[A]$ für die entsprechende projektive Transformation $[A] = \mathbb{P}(A)\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), [x] \mapsto [Ax]$.

Beispiel 2.4.8. Die invertierbare Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt eine projektive Transformation

$$[A]\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

2.4.1 Projektive Transformationen und affine Transformationen

Wir betrachten den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, die affine Karte U_0 und die Hyperebene $H_0 = \{x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Wir identifizieren U_0 mit dem affinen Raum $\mathbb{K}^n$ durch die Bijektionen

$$U_0 \to \mathbb{K}^n, \quad [x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), \qquad \mathbb{K}^n \to U_0, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$$

Proposition 2.4.9. *Sei $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eine projektive Transformation so dass $f(U_0) \subseteq U_0$. Dann ist $f_{|U_0}\colon U_0 \to U_0$ eine affine Transformation. Außerdem, für jede affine Transformation $F\colon U_0 \to U_0$, es gibt eine einzige projektive Transformation $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ mit $f(U_0) \subseteq U_0$, so dass $f_{|U_0} = F$.*

Beweis. Wir wissen dass $f = [A]$ für eine $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Sei $V_0 = \{x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ der Untervektorraum so dass $\mathbb{P}(V_0) = H_0$. Wir sehen dass $f(U_0) \subseteq U_0$ genau dann, wenn $f(H_0) \subseteq H_0$, und das bedeutet $A(V_0) \subseteq V_0$. Wenn $e_0, \dots, e_n$ die kanonische Basis von V_0 ist, dann ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V_0. Wir sehen dass $A(V_0) \subseteq V_0$ genau dann, wenn $Ae_i \in V_0$ für $i = 1, \dots, n$. Das bedeutet dass A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ b' & A' \end{pmatrix}$$

hat, wobei $\lambda \in \mathbb{K}^\times, A' \in GL_n(\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Da $f = [A] = [\lambda^{-1} \cdot A]$, können wir annehmen dass $\lambda = 1$. Sei nun $[1, y] = [1, y_1, \dots, y_n] \in U_0$ mit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Wir sehen dass

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ b' + A'y \end{pmatrix}\right]$$

so dass die Abbildung $f\colon U_0 \to U_0$ affin ist.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 05.12.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Insbesondere, sehen wir dass $f = [A]$ eindeutig bestimmt von b', A' ist, und b', A' sind eindeutig bestimmt von der Abbildung $f_{|U_0}$. Das bedeutet dass f eindeutig bestimmt von $f_{|U_0}$ ist.

Andererseits, sei $F\colon U_0 \to U_0$ eine affine Transformation. Dann existieren eine invertierbare Matrix $A' \in GL_n(\mathbb{K})$ und ein Vektor $b' \in \mathbb{K}^n$ so dass $F([1,y]) = [1, A'y + b']$ für alle $y \in \mathbb{K}^n$. Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & A' \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

und wir betrachten die Abbildung $f = [A]\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Wir sehen dass $F = f_{|U_0}$ und wir haben schon gezeigt dass f die einzige projektive Transformation mit diese Eigenschaft ist. □

Bemerkung 2.4.10. Die vorherige Proposition bedeutet, dass affine Transformationen von U_0 den projektiven Transformationen von $\mathbb{K}^n$ entsprechen, die die Fernhyperebene $H_0 = \{x_0 = 0\}$ feststehen lassen. Wir können sagen, dass affine Transformationen ein Spezialfall von projektiven Transformationen sind.

Beispiel 2.4.11. Wir betrachten eine Translation $t_{b'}\colon U_0 \to U_0, [1,y] \mapsto [1, y' + b]$, mit $b' \in \mathbb{K}^n$. Die entsprechende projektive Transformation $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist durch die Matrix $[A] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b' & I_n \end{smallmatrix}\right)$ gegeben, so dass, wenn $x = (x_1, \dots, x_n)$, haben wir

$$[A]\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \qquad [x_0, x] \mapsto [x_0, x_0 b' + x]$$

Um die entsprechende projektive Transformation zu finden, können wir auch wie folgt arbeiten: sei $[x_0, x] \in U_0$, dann

$$[x_0, x] = [1, \frac{1}{x_0} \cdot x] \mapsto [1, \frac{1}{x_0} \cdot x + b'] = [x_0, x + x_0 b']$$

und die Abbildung $[x_0, x] \mapsto [x_0, x + x_0 b']$ ist definiert auch wenn $[x_0, x] \notin U_0$. Auf diese Weise können wir die projektive Transformation finden, die einer beliebigen affinen Transformation $f\colon U_0 \to U_0$ entspricht.

2.4.2 Punkte in linearer allgemeiner Lage

Definition 2.4.12 (Lineare allgemeine Lage)**.** Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum mit $\dim \mathbb{P}(V) = n$ und seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$. Falls, $r \leq n+1$ sind die Punkte sind in linearer allgemeiner Lage, genau dann, wenn

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$$

Falls $r \geq n+1$, sind die Punkte in linearer allgemeiner Lage, wenn jede Teilmenge $P_{i_1}, \dots, P_{i_{n+1}}$, von $n+1$ Punkte in linearer allgemeiner Lage ist.

Bemerkung 2.4.13. Seien $P_i = [v_i]$ für $v_i \in V \setminus \{0\}$, für $i = 1, \dots, r$. Dann $L(P_1, \dots, P_r) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_r \rangle)$, so dass $\dim L(P_1, \dots, P_r) = \dim\langle v_1, \dots, v_r \rangle - 1$. Wenn $r \leq n+1$, sehen wir dann dass $P_1, \dots, P_r$ in linearer allgemeiner Lage sind, genau dann, wenn $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig sind. Wenn $r \geq n+1$ bedeutet das, dass jede Teilmenge $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n+1}}$ eine Basis von V ist.

Definition 2.4.14 (Projektive Basis)**.** Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum mit $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$ ist eine Menge von $n+2$ Punkte $P_1, \dots, P_{n+2} \in \mathbb{P}(V)$ in linearer allgemeiner Lage.

Beispiel 2.4.15 (Punkte in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)**.** Zwei Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sind in linearer allgemeiner Lage, falls die Punkte unterschiedlich sind. Drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sind in linearer allgemeiner Lage, falls sie paarweise unterschiedlich sind. Zum Beispiel sind die drei Punkte

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

eine projektive Basis von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Beispiel 2.4.16 (Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$)**.** Zwei Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sind in linearer allgemeiner Lage, falls die Punkte unterschiedlich sind. Drei Punkte P_1, P_2, P_3 sind in linearer allgemeiner Lage, falls die Punkte paarweise verschiedene sind, und $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, das bedeutet dass die drei Punkte nicht kollinear sind. Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sind in linearer allgemeiner Lage, falls die Punkte paarweise verschiedene sind, und keine drei dieser Punkte kollinear sind. Zum Beispiel sind die Punkte

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$$

eine projektive Basis von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Beispiel 2.4.17 (Punkte in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$)**.** Die $n+2$ Punkte

$$E_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, E_{n+1} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}, E_{n+2} = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

sind eine projektive Basis von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Wir nennen diese Punkte auch die kanonische projektive Basis von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Lemma 2.4.18. *Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum mit dimension $\dim \mathbb{P}(V) = n$ und seien $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ Punkte in allgemeiner linearer Lage.*

1. *Jede Teilmenge $P_{i_1}, \ldots, P_{i_r}$ ist auch in linearer allgemeiner Lage.*
2. *Wenn $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine invertierbare projektive Abbildung ist, dann sind $f(P_1), \ldots, f(P_r)$ auch in linearer allgemeiner Lage.*
3. *$\mathbb{P}(V)$ besitzt eine projektive Basis.*

Beweis.
1. Das folgt aus der vorherigen Bemerkung 2.4.13, zusammen mit der Tatsache dass jede Teilmenge von einer Menge linear unabhängig Vektoren, selbst linear unabhängig ist.
2. Wir wissen dass $L(f(P_1), \ldots, f(P_r))) = f(L(P_1, \ldots, P_r))$ so dass $\dim L(f(P_1), \ldots, f(P_r))) = \dim L(P_1, \ldots, P_r)$.
3. Sei $n = \dim V$. Dann gibt's eine invertierbare projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}(V)$. Sei $E_0, \ldots, E_{n+2} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ die kanonische projektive Basis. Dann zeigt Punkt (2), dass $f(E_0), \ldots, f(E_{n+1})$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$ ist.

□

Satz 2.4.19 (Fundamentaler Satz der Projektive Abbildungen)**.** *Seien $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ zwei projektive Räume mit $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$, sei $P_1, \dots, P_{n+2} \in \mathbb{P}(V)$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$, und seien $Q_1, \dots, Q_{n+2} \in \mathbb{P}(W)$ beliebige Punkte. Es gibt eine projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ so dass*

$$f(P_i) = Q_i \qquad \text{für } i = 1, \dots, n+2$$

genau dann, wenn die Q_i eine projektive Basis von $\mathbb{P}(W)$ ist. In diesem Fall ist f eindeutig und invertierbar.

Beweis. Wenn f existiert, wissen wir dass die Q_i eine projektive Basis von $\mathbb{P}(W)$ abbilden. Andererseits, nehmen wir an, dass die Q_i eine projektive Basis von $\mathbb{P}(W)$ sind. Wir wollen zeigen, dass f existiert und dass f eindeutig ist: seien $P_i = [v_i]$ und $Q_i = [w_i]$ für $i = 1, \dots, n+2$. Alle $n+1$ Vektoren unter den $v_1, \dots, v_{n+1}$ sind eine Basis von V, weil die Punkte in linearer allgemeiner Lage sind. Insbesondere existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ so dass

$$v_{n+2} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1}$$

und $\lambda_i \neq 0$, weil die Vektoren $v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{n+2}$ eine Basis sind. Eine ähnliche Begründung zeigt dass $w_1, \dots, w_{n+1}$ eine Basis von W sind, und dass

$$w_{n+2} = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_{n+1} w_{n+1}$$

für manche $\mu_i \in \mathbb{K}^\times$. Seien nun $v_i' = \lambda_i v_i, w_i' = \mu_i w_i'$ für $i = 1, \dots, n+1$: sie sind Basen von V und W. Seien auch $v_{n+2}' = v_{n+2}, w_{n+2}' = w_{n+2}$. Dann $P_i = [v_i'], Q_i = [w_i']$ für alle $i = 1, \dots, n+2$, und

$$v_{n+2}' = \sum_{i=1}^{n+1} v_i', \qquad w_{n+2}' = \sum_{i=1}^{n+1} w_i'$$

Sei nun $\varphi\colon V \to W$ die einzige lineare Abbildung so dass $\varphi(v_i') = w_i'$ für $i = 1, \dots, n+1$. Diese Abbildung ist invertierbar, weil die $w_1', \dots, w_{n+1}'$ eine Basis von W sind. Außerdem

$$\varphi(v_{n+2}') = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(v_i') = \sum_{i=1}^{n+1} w_i' = \sum_{i=1}^{n+1} w_i' = w_{n+2}'$$

Sei nun $f = \mathbb{P}(\varphi)$. Wir sehen, dass $f(P_i) = [\varphi(v_i')] = [w_i'] = Q_i$ für alle $i = 1, \dots, n+2$.Außerdem, f ist auch invertierbar.

Sei nun $g\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine andere projektive Abbildung, so dass $g(P_i) = Q_i$ für $i = 1, \dots, n+2$. Dann $g = [\psi]$ für eine lineare Abbildung $\psi\colon V \to W$ und $[\psi(v_i')] = [w_i']$ für alle $i = 1, \dots, n+2$, so dass $\psi(v_i) = a_i \cdot w_i$ für manche $a_i \in \mathbb{K}^\times, i = 1, \dots, n+1$. Insbesondere

$$a_{n+2} w_{n+2}' = \psi(v_{n+2}') = \psi\left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i'\right) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i w_i'$$

$$a_{n+2} w_{n+2}' = a_{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i'\right) = \sum_{i=1}^{n+2} a_{n+2} w_i'$$

Da die $w_1', \dots, w_{n+1}'$ eine Basis von W sind, bedeutet das, dass $a_i = a_{n+2}$ für alle $i = 1, \dots, n+1$. Das zeigt dass $\psi = a_{n+2}\varphi$ und dann $g = \mathbb{P}(\psi) = \mathbb{P}(\varphi) = f$. $\square$

Bemerkung 2.4.20. Das bedeutet, dass eine projektive Transformation $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ eindeutig durch das Bild von $n+2$ Punkten in linearer allgemeiner Lage bestimmt ist. Erinnern wir uns, dass eine affine Transformation $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ durch das Bild von $n+1$ Punkten in linearer allgemeiner Lage bestimmt wurde: projektive Transformationen sind flexibler als affine Transformationen.

Beispiel 2.4.21. Wir betrachten die folgende Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$:

$$P_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ Q_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ Q_4 = \begin{bmatrix}4\\5\\3\end{bmatrix}$$

Man kann zeigen dass $P_1, \dots, P_4$ und $Q_1, \dots, Q_4$ zwei projektive Basen von $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sind. Wir wollen nun die einzige projektive Transformation $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ finden, so dass $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, \dots, 4$, und wir wollen f in der form $f = [A]\colon [x] \mapsto [Ax]$ schreiben, mit $A \in GL_3(\mathbb{Q})$. Wir können das gleiche Verfahren wie beim Beweis des Satzes anwenden. Zuerst schreiben wir einen Vektor, der den letzten Punkt darstellt, als Linearkombination von Vektoren, die die anderen Punkte darstellen:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Sei nun $A \in GL_3(\mathbb{K})$ die einzige Matrix, so dass

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Dann $f = [A]$. Die Matrix A kann man explizit schreiben:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -4 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2.4.3 Möbiustransformationen und das Doppelverhältnis

Projektive Transformationen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sind auch **Möbiustransformationen** genannt. Sie sind von $PGL_2(\mathbb{K})$ parametrisiert und sie haben die Form

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \qquad \begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}ax_0 + bx_1\\ cx_0 + dx_1\end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$$

Wir betrachten nun die affine Karte $U_1 = \{[x_0, x_1] \mid x_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ und den entsprechenden Fernpunkt $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus U_1 = \{[1,0]\}$. Wir identifizieren U_1 mit der affinen Gerade $\mathbb{K}$ durch die Bijektionen $[x_0, x_1] \mapsto [\frac{x_0}{x_1}, 1], z \mapsto [z, 1]$, so dass $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_1 \cup \{[1,0]\} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Bemerkung 2.4.22. Vorsicht! Hier nutzen wir die affine Karte U_1 und den entsprechenden Fernpunkt $[1,0]$, statt die affine Karte U_0 und den entsprechenden Fernpunkt $[0,1]$.

Wir sehen dass

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} az+b \\ cz+d \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{falls } cz+d \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty, & \text{falls } cz+d = 0 \end{cases} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{K}$$

Deswegen ist eine Möbiustransformation auch in der Form

$$f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

geschrieben und sie ist auch eine **gebrochen lineare Funktion** genannt. Für den Fernpunkt $\infty = [1, 0]$ sehen wir dass

$$f(\infty) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{falls } c \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty, & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

und wir können dieses auch wie folgt beschreiben:

$$f(\infty) = \begin{cases} \frac{a(\infty)+b}{c(\infty)+d} = \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0 \\ \frac{a(\infty)+b}{d} = \infty, & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

Wir wissen dass eine projektive Basis von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ ist durch drei paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ gegeben.

Definition 2.4.23 (Kanonische projektive Basis von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)**.** Die drei Punkte

$$\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sind die kanonische projektive Basis von $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Der fundamentale Satz von projektive Abbildung für $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sagt:

Korollar 2.4.24. *Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ drei paarweise verschiedene Punkte. Es gibt eine einzige Möbiustransformation $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ so dass $f(P_1) = \infty, f(P_2) = 0, f(P_3) = 1$.*

Beispiel 2.4.25. Die einzige Möbiustransformation f so dass $f(\infty) = \infty, f(0) = 0, f(1) = 1$ ist die Identität $f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$.

Definition 2.4.26 (Doppelverhältnis von vier Punkte in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)**.** Seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ paarweise Verschiedene Punkte, sei $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ die einzige Möbiustransformation so dass $f(P_1) = \infty, f(P_2) = 0, f(P_3) = 1$ und sei $x \in \mathbb{K}$ so dass $f(P_4) = [x, 1] \in U_1$. Dass Doppelverhältnis von P_1, P_2, P_3, P_4 ist

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) := x.$$

Beispiel 2.4.27. Nehmen wir an, dass $P_1, P_2, P_3 \in U_1$, so dass $P_i = [a_i, 1] = a_i$ für $i = 1, 2, 3$. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{(z - a_2)(a_3 - a_1)}{(z - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

oder, in Matrixform,

$$f = \begin{bmatrix} a_3 - a_1 & -a_2(a_3 - a_1) \\ a_3 - a_2 & -a_1(a_3 - a_2) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (a_3 - a_1)x_0 - a_2(a_3 - a_1)x_1 \\ (a_3 - a_2)x_0 - a_1(a_3 - a_2)x_1 \end{bmatrix}$$

Wir sehen dass

$$f(P_1) = f(a_1) = \infty, \quad f(P_2) = f(a_2) = 0, \quad f(P_3) = f(a_3) = 1$$

Sei nun $P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$. Wir sehen dass

$$f(P_4) = \begin{cases} \frac{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}, & \text{falls } P_4 = [a_4, 1] = a_4 \in U_1 \\ \frac{(a_3 - a_1)}{(a_3 - a_2)}, & \text{falls } P_4 = [1, 0] = \infty \end{cases}$$

Insbesondere, wenn $P_4 = [a_4, 1] = a_4$, sehen wir dass

$$([a_1, 1], [a_2, 1]; [a_3, 1], [a_4, 1]) = (a_1, a_2; a_3, a_4) = \frac{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

Wenn $P_4 = [1, 0] = \infty$, sehen wir, dass

$$([a_1, 1], [a_2, 1]; [a_3, 1], [1, 0]) = (a_1, a_2; a_3, \infty) = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}$$

das Teilverhältnis von $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$ ist.

Proposition 2.4.28. *Seien $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene und seien $Q_1, \ldots, Q_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene. Es gibt eine Möbiustransformation $g\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ so dass $Q_i = g(P_i)$ für $i = 1, \ldots, 4$ genau dann, wenn*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (Q_1, Q_2; Q_3, Q_4)$$

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ die einzige Möbiustransformation so dass $f(P_1) = \infty, f(P_2) = 0, f(P_3) = 1$ und sei $x \in \mathbb{K}$ so dass $f(P_4) = [x, 1]$. Sei auch $h\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ die einzige Möbiustransformation so dass $h(Q_1) = \infty, h(Q_2) = 0, h(Q_3) = 1$ und sei $y \in \mathbb{K}$ so dass $h(Q_4) = [y, 1]$. Das bedeutet

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = x, \qquad (Q_1, Q_2; Q_3, Q_4) = y$$

Nehmen wir an dass $g\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine Möbiustransformation ist, so dass $g(P_i) = Q_i$für $i = 1, \ldots, 4$. Dann $\varphi = h \circ g \circ f^{-1}$ ist eine Möbiustransformation und $\varphi(\infty) = \infty, \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$, so dass $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{K})}$. Insbesondere

$$[x, 1] = (h \circ g \circ f^{-1})([x, 1]) = h(g(P_4)) = h(Q_4) = [y, 1]$$

so dass $x = y$. Andererseits, nehmen wir an dass die zwei Doppelverhältnisse gleich sind, so dass $x = y$, und sei $g = h^{-1} \circ f$. Man sieht dass $g(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $g(P_4) = h^{-1}([x, 1]) = h^{-1}([y, 1]) = Q_4$. $\square$

Proposition 2.4.29 (Charakterisierung von Möbiustransformationen)**.** *Eine bijektive Abbildung* $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ *ist eine Möbiustransformation genau dann, wenn* f *Doppelverhältnisse erhält:*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4))$$

für alle $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ *paarweise verschiedene.*

Beweis. Wenn f eine Möbiustransformation ist, haben wir schon gezeigt dass f Doppelverhältnisse erhält. Andererseits, nehmen wir an dass f Doppelverhältnisse erhält. Sei $g\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine Möbiustransformation so dass $g(f(\infty)) = \infty, g(f(0)) = 0, g(f(1)) = 1$. Dann $h = g \circ f$ erhält Doppelverhältnisse und $h(\infty) = \infty, h(0) = 0, h(1) = 1$. Wir wollen zeigen dass $h = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{K})}$: sei $x \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, wir müssen zeigen dass $h([x, 1]) = [x, 1]$. Sei y so dass $h([x, 1]) = [y, 1]$. Da h Doppelverhältnisse erhält, sehen wir, dass

$$x = (\infty, 0; 1[x, 1]) = (h(\infty), h(0); h(1), h([x, 1])) = (\infty, 0; 1, [y, 1]) = y$$

und wir sind fertig. Das bedeutet, dass $f = g^{-1}$ so dass f eine Möbiustransformation ist. □

Das Doppelverhältnis und Permutationen

Seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene Punkte. Das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ ist abhängig von der Reihenfolge der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4. Wenn wir jedoch die Reihenfolge der Punkte ändern, können wir bestimmen, wie sich das Doppelverhältnis ändert. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_4$ von Permutationen $\sigma\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$. Für jede $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, betrachten wir das Doppelverhältnis

$$(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}; P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)})$$

Wir betrachten auch die normale Untergruppe $V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft \mathfrak{S}_4$.

Proposition 2.4.30. *Wenn* $\sigma \in V_4$ *dann ist das Doppelverhältnis unverändert:*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_3, P_4; P_1, P_2) = (P_4, P_3; P_2, P_1)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass alle Punkte unterschiedlich von ∞ sind: $P_i = [a_i, 1] = a_i$ für $i = 1, \ldots, 4$, so dass

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

Dann ist es einfach zu überprüfen, was wir wollen: zum Beispiel

$$(P_2, P_1; P_4, P_3) = \frac{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)}{(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)} = (P_1, P_2; P_3, P_4)$$

und die andere Fällen sind ähnlich. Wenn einer der Punkte gleich ∞ ist, kann man einen ähnlichen Beweis führen. □

Die Quotientengruppe $\mathfrak{S}_4/V_4$ ist

$$\mathfrak{S}_4/V_4 = \{[\mathrm{id}], [(12)], [(13)], [(23)], [(123)], [(132)]\}$$

so dass jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ die Form $\tau, (12)\tau, (13)\tau, (23)\tau, (123)\tau$ oder $(132)\tau$ hat, mit $\tau \in V_4$. Da V_4 das Doppelverhältnis unverändert lasst, müssen wir nur überprüfen was passiert mit der Permutationen $(12), (13), (23), (123), (132)$

Proposition 2.4.31. *Seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene mit Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4) = z$. Dann*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = z \qquad (P_2, P_1; P_3, P_4) = \frac{1}{z}$$
$$(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - z \qquad (P_3, P_1; P_2, P_4) = \frac{1}{1-z}$$
$$(P_3, P_2; P_1, P_4) = \frac{z}{z-1} \qquad (P_2, P_3; P_1, P_4) = \frac{z-1}{z}$$

Beweis. Wir könnten wie in der vorherigen Proposition vorgehen. Wir können auch anders argumentieren: durch eine Möbiustransformation können wir annehmen dass $P_1 = \infty, P_2 = 0, P_3 = 1$, so dass $P_4 = z = [z, 1]$. Um $(P_2, P_1; P_3, P_4) = (0, \infty; 1, z)$ zu berechnen, müssen wir die einzige Möbiustransformation $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ finden mit $f(0) = \infty, f(\infty) = 0, f(1) = 1$ und dann $(0, \infty; 1, z) = f(z)$. Es ist einfach zu sehen dass $f(z) = \frac{1}{z}$ genau die Möbiustransformation die wir suchen ist. Die andere Fälle sind ähnlich. □

Bemerkung 2.4.32. Die Idee des vorherigen Beweises zeigt, dass die Untergruppe der Möbius-Transformationen, die die Elemente $\infty, 1, 0$ permutiert, die Gruppe der folgende Transformationen ist:

$$\mathrm{id}\colon z \mapsto z \qquad f_{(\infty 0)} z \mapsto \frac{1}{z}$$
$$f_{(01)}\colon z \mapsto 1 - z \qquad f_{(\infty 01)}\colon z \mapsto \frac{1}{1-z}$$
$$f_{(\infty 1)}\colon z \mapsto \frac{z}{z-1} \qquad f_{(\infty 10)}\colon z \mapsto \frac{z-1}{z}$$

Diese Untergruppe heißt die **anharmonische Gruppe** und sie ist isomorph zu $\mathfrak{S}_3$.

Doppelverhältnis für kollineare Punkte in einem projektiven Raum

Man kann auch das Doppelverhältnis für vier kollineare Punkte in einem beliebigen projektiven Raum definieren.

Definition 2.4.33 (Doppelverhältnis von vier kollineare Punkte)**.** Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum und seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ vier paarweise verschiedene Punkte, die auf einer gemeinsamer projektive Gerade $L \subseteq \mathbb{P}(V)$ liegen. Sei $g\colon L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine invertierbare projektive Abbildung. Das Doppelverhältnis von P_1, P_2, P_3, P_4 ist

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) \coloneqq (f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4))$$

Bemerkung 2.4.34. Das Doppelverhältnis ist wohldefiniert, weil, wenn $g'\colon L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine andere invertierbare projektive Abbildung ist, dann ist $f = g' \circ g^{-1}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine Möbiustransformation, so dass

$$(g(P_1), g(P_2); g(P_3), g(P_4)) = (f(g(P_1)), f(g(P_2)); f(g(P_3)), f(g(P_4))) = (g'(P_1), g'(P_2); g'(P_3), g'(P_4))$$

Korollar 2.4.35. *Seien $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ projektive Räume und sei $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine projektive Abbildung. Seien auch $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ vier kollineare Punkte. Dann*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4))$$

Beweis. Die Punkte $P_1, \dots, P_4$ liegen auf einer gemeinsame Gerade L und die Punkte $f(P_1), \dots, f(P_4)$ liegen auf der gemeinsame Gerade $L' = f(L)$. Sei $g\colon L' \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine invertierbare projektive Abbildung: dann ist $g \circ f_{|L}\colon L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ eine invertierbare projektive Abbildung, so dass

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (g(f(P_1), g(f(P_2)); g(f(P_3)), g(f(P_4))) = (f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4))$$

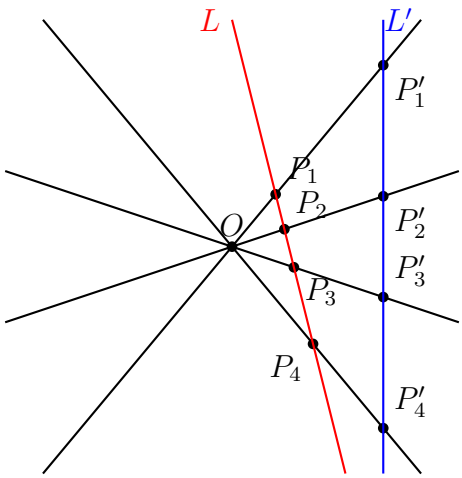
□

Wir haben den Satz von Thales für das Teilverhältnis in der affinen Geometrie gesehen. Es gibt ein analoges Ergebnis für das Kreuzverhältnis: Wir geben es zunächst für den Fall der Ebene an

Satz 2.4.36 (Satz von Thales für das Doppelverhältnis)**.** *Seien $H_1, H_2, H_3, H_4 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene projektive Geraden durch einen gemeinsamen Punkt $O \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ und seien $L, L' \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zwei Gerade die nicht durch O gehen. Seien $P_i = H_i \cap L, P_i' = H_i \cap L'$. Dann*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1', P_2'; P_3', P_4')$$

Anders gesagt: das Doppelverhältnis ist nur abhängig von $H_1, \dots, H_4$ und nicht von L.



Beweis. Für jede $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \{O\}$ die zwei Geraden $L(O, Q)$ und L' treffen sich in einem einzigen Punkt. Das definiert eine Abbildung

$$\pi_{O,L'}\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \{O\} \to L', \qquad Q \mapsto L(O, Q) \cap L'$$

Diese Abbildung ist die Projektion von O nach L' und man sieht als Hausaufgabe dass die Einschränkung $\pi_{O,L'|L}\colon L \to L'$ eine projektive Abbildung ist. Außerdem, sehen wir, dass $\pi_{O,L'}(P_i) = P_i'$ weil $L(O, P_i) = H_i$ für alle $i = 1, \dots, 4$. Da das Doppelverhältnis invariant für projektive Abbildungen ist, sehen wir dass $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1', P_2'; P_3', P_4')$. □

Bemerkung 2.4.37. Der Satz von Thales in einem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ist wie folgt: sei $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ein projektiver Unterraum mit dimension $n-2$ und seien H_1, H_2, H_3, H_4 paarweise verschiedene Hyperebene so dass $\Lambda \subseteq H_i$. Seien auch $L, L' \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ zwei projektive Geraden so dass $L \cap \Lambda = L' \cap \Lambda = \emptyset$, und seien $P_i = H_i \cap L, P_i' = H_i \cap L'$ für $i = 1, \dots, 4$. Dann

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1', P_2'; P_3', P_4')$$

Der Beweis ist ähnlich: man betrachtet die Projektion von Λ nach L':

$$\pi_{\Lambda,L'}\colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus \Lambda \to L', \qquad Q \mapsto L(\Lambda, Q) \cap L'$$

und man sieht dass $\pi_{\Lambda,L'|L}\colon L \to L'$ eine projektive Abbildung ist, und dass $\pi_{\Lambda,L'}(P_i) = P_i'$ für $i = 1, \dots, 4$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 13.12.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

2.5 Ebene projektive Geometrie

Nun wollen wir einige klassische Ergebnisse der ebenen projektiven Geometrie zeigen. Zuerst eine Definition

Definition 2.5.1 (Perspektive)**.** Punkte $P_1, \dots P_n \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ und Punkte $P_1', \dots, P_n' \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sind perspektivisch bezüglich eines Punktes $O \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, wenn

$$O \in \bigcap_{i=1}^{n} L(P_i, P_i')$$

Bemerkung 2.5.2. Seien P_1, P_2, P_3, P_4 auf eine Gerade L und P_1', P_2', P_3', P_4' auf eine Gerade L'. Wenn die Punkte perspektivisch bezüglich einem Punkt $O \notin L \cup L'$ sind, dann zeigt der Satz von Thales, dass

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1', P_2'; P_3', P_4').$$

Lemma 2.5.3. *Seien $P_1, P_2, P_3, P_4, P_4' \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ auf eine Gerade so dass*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4')$$

Dann $P_4 = P_4'$.

Beweis. Durch eine invertierbare projektive Transformation $f\colon L \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, können wir annehmen dass die Punkte in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sind, und durch eine Möbiustransformation, können wir annehmen dass $P_1 = \infty, P_2 = 0, P_3 = 1$. Dann $P_4 = x, P_4 = x'$ für $x, x' \in \mathbb{K}$, und

$$x = (P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4') = x'$$

□

Satz 2.5.4 (Satz von Pappos - Projektive Version)**.** *Seien A, B, C drei Punkte auf einer Gerade, und P, Q, R drei Punkte auf einer anderen verschiedene Gerade. Die drei Punkte*

$$X = L(A, Q) \cap L(B, P),\ Y = L(A, R) \cap L(C, P),\ Z = L(B, R) \cap L(C, Q)$$

sind kollinear.

Beweis.
- *Mit Koordinaten*: Sei $O = L(A, B, C) \cap L(P, Q, R)$ der Schnittpunkt der zwei Geraden. Durch eine projektive Transformation, können wir annehmen dass $O = [0, 0, 1], A =$

$[1,0,0], P = [0,1,0]$. Dann $B = [b,0,1], C = [c,0,1], Q = [0,q,1], R = [0,r,1]$ für $b,c,r,q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.Wir können nun berechnen

$$\begin{aligned} X &= L(A,Q) \cap L(B,P) = \{y - qz = 0\} \cap \{x - bz = 0\} = [b,q,1] \\ Y &= L(A,R) \cap L(C,P) = \{y - rz = 0\} \cap \{x - cz = 0\} = [c,r,1] \\ Z &= L(B,R) \cap L(C,Q) = \{rx + by - brz = 0\} \cap \{qx + cy - cqz = 0\} = [x_0, y_0, z_0] \end{aligned}$$

Wir müssen x_0, y_0, z_0 nicht explizit berechnen. Um zu überprüfen dass die drei Punkte kollinear sind, berechnen wir die Determinante:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b & c & x_0 \\ q & r & y_0 \\ 1 & 1 & z_0 \end{pmatrix} &= (q-r)x_0 - (b-c)y_0 + (br - qc)z_0 \\ &= (qx_0 + cy_0 - cqz_0) - (rx_0 + by_0 - brz_0) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

- *Ohne Koordinaten*: Seien $Y' = L(P,C) \cap L(X,Z), Y'' = L(A,R) \cap L(X,Z)$. Wenn wir zeigen dass $Y' = Y''$, dann $Y' = Y'' \in L(P,C) \cap L(A,R)$, so dass $Y' = Y$ und $Y \in L(X,Z)$. Wir definieren die Punkte $W = L(A,P) \cap L(X,Z)$ und $D = L(P,Z) \cap L(A,B,C), S = L(A,Z) \cap L(P,Q,R)$. Die Punkte A,B,C,D und S,R,Q,P sind perspektivisch bezüglich Z, so dass
$$(A,B;C,D) = (S,R;Q,P)$$
Die Punkte A,B,C,D und W,X,Y',Z sind perspektivisch bezüglich P. Außerdem, sind die Punkte S,R,Q,P und Z,Y'',X,W perspektivisch bezüglich A, so dass
$$(W,X;Y',Z) = (A,B;C,D) = (S,R;Q,P) = (Z,Y'';X,W)$$
Die Symmetrien des Doppelverhältnis zeigen dass $(Z,Y'';X,W) = (W,X;Y'',Z)$, so dass,
$$(W,X;Y',Z) = (W,X;Y'',Z)$$
Das bedeutet, dass $Y' = Y''$ (Warum?).

□

Satz 2.5.5 (Satz von Desargues - Projektive Version)**.** *Seien $A,B,C \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ und $A',B',C' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ zwei Mengen von nicht-kollineare Punkte, die perspektivisch bezüglich eines Punktes O sind. Wir nehmen an dass alle die Punkte A,B,C,A',B',C' paarweise verschiedene sind. Die drei Punkte*

$$X = L(B,C) \cap L(B',C'),\ Y = L(A,C) \cap L(A',C'),\ Z = L(A,B) \cap L(A',B')$$

sind kollinear.

Beweis.
- *Mit Koordinaten*: Durch eine projektive Transformation, können wir annehmen dass $O = [1,1,1], A' = [1,0,0], B' = [0,1,0], C' = [0,0,1]$. Dann $A = [a,1,1], B = [1,b,1], C = [1,1,c]$ für $a,b,c \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$. Wir können nun berechnen

$$\begin{aligned} X &= L(B,C) \cap L(B',C') = \{(1-bc)x + (c-1)y + (b-1)z = 0\} \cap \{x = 0\} = [0, b-1, 1-c] \\ Y &= L(A,C) \cap L(A',C') = \{(c-1)x + (1-ac)y + (a-1)z = 0\} \cap \{y = 0\} = [a-1, 0, 1-c] \\ Z &= L(A,B) \cap L(A',B') = \{(b-1)x + (a-1)y + (1-ab)z = 0\} \cap \{z = 0\} = [a-1, 1-b, 0] \end{aligned}$$

Um zu überprüfen dass die drei Punkte kollinear sind, berechnen wir die Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a-1 & a-1 \\ b-1 & 0 & 1-b \\ 1-c & 1-c & 0 \end{pmatrix} = (a-1)(1-b)(1-c) + (a-1)(b-1)(1-c) = 0$$

- *Ohne Koordinaten*: Seien $X' = L(B', C') \cap L(Y, Z)$ und $X'' = L(B, C) \cap L(Y, Z)$. Wie im Beweis des Satzes von Pappos,wollen wir zeigen dass $X' = X''$. Seien M, N, P die Schnittpunkte von $L(B, B')$ mit $L(A, C), L(A', C'), L(Y, Z)$. Wir sehen zuerst dass Z, Y, Q, X'' und A, Y, M, C perspektivisch bezüglich B sind, so dass

  $$(Z, Y; P, X'') = (A, Y; M, C).$$

  Danach sehen wir dass A, Y, M, C und A', Y, N, C' perspektivisch bezüglich O sind, so dass

  $$(A, Y; M, C) = (A', Y; N, C')$$

  Am Ende sehen wir, dass A', Y, N, C' und Z, Y, P, X' perspektivisch bezüglich B' sind, so dass

  $$(A', Y; N, C') = (Z, Y; P, X')$$

  Die Gleichung $(Z, Y; P, X'') = (Z, Y; P, X')$ zeigt dass $X' = X''$.

□

Satz 2.5.6. *Seien $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene Punkte auf einer Gerade und $E, F, G, H \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ paarweise verschiedene Punkte auf einer anderen Gerade. Seien auch*

$$X = L(A, F) \cap L(B, E), \quad Y = L(B, G) \cap L(C, F), \quad Z = L(C, H) \cap L(G, D)$$

Die Punkte X, Y, Z sind kollinear, genau dann, wenn

$$(A, B; C, D) = (E, F; G, H)$$

Beweis. Seien $P = L(A, G) \cap L(C, E)$ und $Q = L(C, G) \cap L(X, Y)$. Der Satz von Pappos zeigt dass $P \in L(X, Y)$. Seien nun $Z' = L(G, D) \cap L(X, Y), Z'' = L(C, H) \cap L(X, Y)$. Die Punkte A, B, C, D und P, Y, Q, Z' sind perspektivisch bezüglich G und die Punkte E, F, G, H und P, Y, Q, Z'' sind perspektivisch bezüglich C, so dass

$$(A, B; C, D) = (P, Y; Q, Z'), \quad (E, F; G, H) = (P, Y; Q, Z'')$$

Das bedeutet, dass

$$(A, B; C, D) = (E, F; G, H) \iff (P, Y; Q, Z') = (P, Y; Q, Z'') \iff Z' = Z''$$

und wir sehen dass $Z' = Z''$ genau dann, wenn $Z \in L(X, Y)$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 17.12.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Satz 2.5.7 (Vollständiges Viereck)**.** *Seien $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ eine projektive Basis und seien*

$$E = L(A, B) \cap L(C, D), \ F = L(B, C) \cap L(D, A), \ X = L(A, C) \cap L(E, F), \ Y = L(B, D) \cap L(E, F)$$

Denn

$$(E, F; X, Y) = -1$$

Beweis. Es gibt mindestens zwei Möglichkeiten: eine mit Koordinaten und eine "mehr geometrisch".

- *Mit Koordinaten:* Projektive Transformationen schicken Geraden zu Geraden und lassen das Doppelverhältnis unverändert. Durch eine projektive Transformation, können wir annehmen dass

  $$A = [1,0,0],\ B = [0,1,0],\ C = [0,0,1],\ D = [1,1,1]$$

  und dann $L(A,B) = \{z = 0\}, L(C,D) = \{x - y = 0\}, L(B,C) = \{x = 0\}, L(A,D) = \{y - z = 0\}$, so dass $E = [1,1,0], F = [0,1,1]$ und $L(E,F) = \{x - y + z = 0\}$. Wir sehen auch, dass $L(A,C) = \{y = 0\}, L(B,D) = \{x - z = 0\}$ und dann $X = [1,0,-1], Y = [1,2,1]$. Die Punkte E, F, X, Y liegen auf der Gerade $L(E,F)$ und die Abbildung $f\colon L(E,F) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), [x,y,z] \mapsto [x,z]$ ist eine invertierbare projektive Abbildung, weil sie die Einschränkung auf $L(E,F)$ der linearen Projektion $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \{[0,1,0]\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K}), [x,y,z] \mapsto [x,z]$. Die Definition von Doppelverhältnis zeigt dass

  $$(E,F;X,Y) = (f(E), f(F); f(X), f(Y)) = ([1,0],[0,1];[1,-1],[1,1]) = (\infty, 0; -1, 1)$$

  Die Symmetrien des Doppelverhältnis zeigen dass

  $$(\infty, 0; -1, 1) = (\infty, 0; 1, -1)^{-1} = (-1)^{-1} = -1.$$

- *Ohne Koordinaten:* Sei $P = L(A,C) \cap L(B,D)$. Die Punkte E, F, X, Y und B, D, P, Y sind perspektivisch bezüglich des Punktes A, so dass

  $$(E,F;X,Y) = (B,D;P,Y)$$

  Die Punkte B, D, P, Y und die Punkte F, E, X, Y sind perspektivisch bezüglich des Punktes C,so dass

  $$(B,D;P,Y) = (F,E;X,Y)$$

  Die Symmetrien des Doppelverhältnis zeigen nun, dass

  $$(E,F;X,Y) = (F,E;X,Y)^{-1} = (E,F;X,Y)^{-1}$$

  Da $(E,F;X,Y) \neq 1$, es muss sein, dass $(E,F;X,Y) = -1$.

□

Der Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie wird später nachgereicht

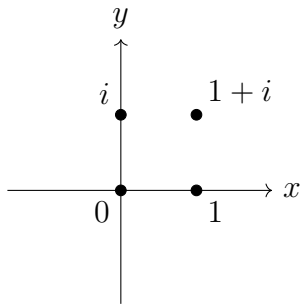
♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 19.12.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

2.6 Die reelle Geometrie der komplexen Gerade

2.6.1 Die reelle Geometrie der affinen komplexen Gerade

Wir betrachten die komplexe Zahlen $\mathbb{C}$. Wenn man den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ verwendet, kann man sich $\mathbb{C}$ als die komplexe Ebene $\mathbb{R}^2$ vorstellen: die x-Achse entspricht denn die reelle Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Außerdem, die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ entspricht den Betrag

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Eine komplexe affine Transformation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die Form $f(z) = az+b$, mit $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$a = a' + ia'',\ b = b' + ib'',\ z = x + iy$$

mit $a', a'', b', b'', x, y \in \mathbb{R}$, und dann sehen wir, dass

$$f(z) = f(x+iy) = (a' + ia'')(x+iy) + (b' + ib'') = ((a'x - a''y) + i(a''x + a'y)) + (b' + ib'')$$

Wir schreiben dies mit dem Real- und Imaginärteil als die Abbildung

$$\Phi(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' & -a'' \\ a'' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix} \tag{2.6.1}$$

so dass $\Phi(f)$ eine reelle affine Abbildung ist. Insbesondere

$$\det \begin{pmatrix} a' & -a'' \\ a'' & a' \end{pmatrix} = (a')^2 + (a'')^2 = |a|^2 > 0 \tag{2.6.2}$$

so dass $\Phi(f)$ eine affine Transformation ist. Das definiert eine Abbildung

$$\Phi\colon\ \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), \qquad f \mapsto \Phi(f)$$

Bemerkung 2.6.1. Die affine Transformation $\Phi(f)$ ist einfach f, aber als Transformation auf $\mathbb{R}^2$ und nicht auf $\mathbb{C}$ gesehen. Wir können auch mehr Formalismus nutzen: sei

$$\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \qquad z = x + iy \mapsto (x, y)$$

die Identifikation zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$. Dann $\Phi(f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Insbesondere ist Φ ein Gruppenhomomorphismus:

$$\Phi(f \circ g) = \phi \circ (f \circ g) \circ \phi^{-1} = (\phi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ g \circ \phi^{-1}) = \Phi(f) \circ \Phi(g),$$

und Φ ist auch injektiv:

$$\Phi(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \iff \phi \circ f \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \iff f = \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,.$$

Bemerkung 2.6.2. Das Gruppenhomomorphismus Φ ist aber nicht surjektiv. Das bedeutet, dass nicht alle affine Transformationen in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ die Form $\Phi(f)$ für eine $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ haben. Z.B. die affine Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hat nicht diese Form, weil

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

und das ist nicht mit (2.6.2) kompatibel.

Wir können aber das Bild von Φ bestimmen: wir betrachten drei Arten von komplexe affine Transformationen

$$\begin{aligned} t_b\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto z + b, && b \in \mathbb{C}, \\ s_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto \lambda \cdot z, && \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \\ r_\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto e^{i\theta} \cdot z, && \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

und wir wollen sie als reelle affine Transformationen betrachten:

Lemma 2.6.3. *Mit der vorherigen Notation, ist $\Phi(t_b)$ eine reelle Translation, $\Phi(s_\lambda)$ eine reelle zentrische Streckung, und $\Phi(r_\theta)$ eine reelle Drehung mit Winkel θ ist.*

Beweis. Alles folgt aus (2.6.1): wenn $b = b' + ib''$, dann ist

$$\Phi(t_b)\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + b' \\ y + b'' \end{pmatrix}$$

eine Translation. Wir sehen auch dass

$$\Phi(s_\lambda)\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Endlich, wenn $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, sehen wir, dass

$$\Phi(r_\theta)\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

so dass $\Phi(r_\theta)$ eine reelle Drehung mit Winkel θ ist. □

Proposition 2.6.4. *Das Bild von $\Phi\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ genau die Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ist, die von den Translationen, den zentrische Streckungen und den Drehungen erzeugt wird.*

Beweis. Wir zeigen zuerst dass die Untergruppe erzeugt von den Translationen, den zentrische Streckungen und den Drehungen eine Untergruppe von der Gruppe $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ ist. Die Formel im Beweis des vorheriges Lemmas zeigen dass jede reelle affine Translation und jede lineare Drehung in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ sind. Da jede Drehung eine Komposition einer linearen Drehung und einer Translation ist, sind alle Drehungen auch in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$. Die Formel im Beweis des vorheriges Lemmas zeigen auch, dass jede lineare zentrische Streckung $\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\lambda > 0$ in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ ist. Da $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ eine reelle Drehung mit Winkel π ist, sind jede lineare zentrische Streckung $-\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \lambda > 0$ auch in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$. Dann ist jede lineare zentrische Streckung in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ und da alle Translationen in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ sind, ist jede lineare zentrische Streckung in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$.

Zum Schluss zeigen wir dass jede Transformation in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ die Komposition einer relle Translation, einer reelle zentrische Streckung und eine reelle Drehung ist.Alle komplexe affine Transformationen haben die Form $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$. Wenn wir a in der Form $a = |a| \cdot e^{i\theta}$ schreiben, dann sehen wir dass $f = t_b \circ s_{|a|} \circ r_\theta$, so dass $\Phi(f) = \Phi(t_b) \circ \Phi(s_{|a|}) \circ \Phi(r_\theta)$. □

Auf diese Weise können wir einige Eigenschaften komplexer affiner Transformationen aus der Sicht der reellen affinen Geometrie ermitteln.

Beispiel 2.6.5. Wir erinnern uns, dass eine lineare Transformation $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ winkeltreu ist, wenn A den Winkel zwischen zwei Vektoren erhaltet (siehe auch die Übungsaufgabe 6.1). Eine affine Transformation $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(v) = Av + w$, mit $A \in GL_2(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu, wenn A winkeltreu ist. Es ist leicht zu zeigen dass die Komposition von winkeltreue Abbildungen, wieder winkeltreu ist. Übungsaufgabe 6.1 zeigt dass eine $A \in GL_2(\mathbb{R})$ winkeltreu ist, genau dann, wenn $A = \lambda \cdot B$, mit $\lambda \in \mathbb{R}^\times, B \in O_2(\mathbb{R})$. Insbesondere sind reelle Translationen, reelle Drehungen und reelle zentrische Streckungen winkeltreu. Dann ist jede Abbildung in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2))$ auch winkeltreu.

Nicht alle winkeltreue Abbildungen sind aber in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$: zum Beispiel die Abbildung in Bemerkung 2.6.2 ist winkeltreu, weil sie eine Isometrie ist, aber sie ist nicht in $\Phi(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2))$.

Nun wollen wir uns das Zusammenspiel zwischen komplexen affinen Transformationen und einigen reellen geometrischen Standardkonzepten ansehen: eine **reelle Gerade** in $\mathbb{C}$ ist eine Menge

$$\ell = \{z = x + iy \,|\, ax + by = c\} \qquad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq 0$$

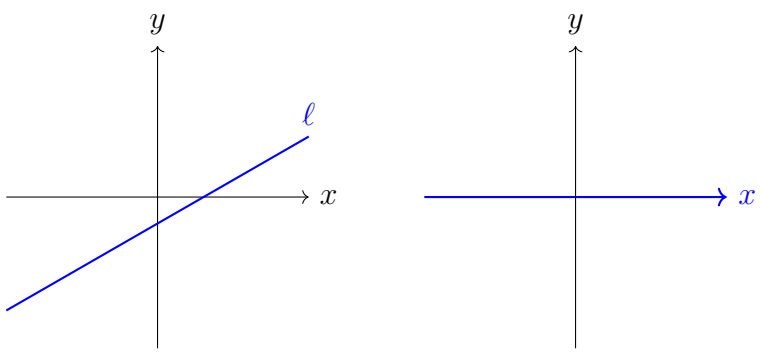
Zum Beispiel, die Menge von reelle Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine reelle Gerade. Ein **reeller Kreis** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Menge

$$S_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}.$$

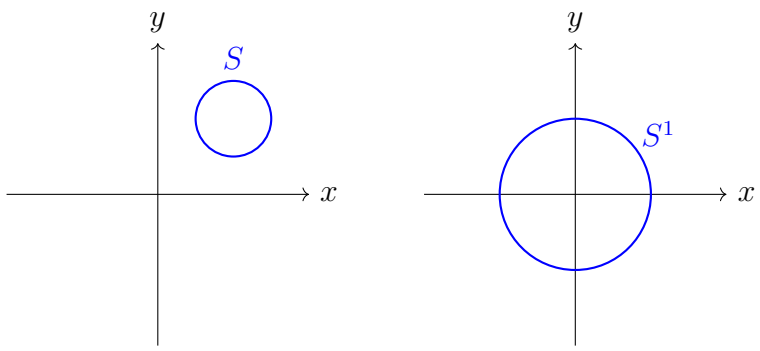
Der **Einheitskreis** ist der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}.$$

Lemma 2.6.6. *1. Sei $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle Gerade und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Dann ist $f(\ell)$ auch eine reelle Gerade. Außerdem, existiert eine $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, so dass $g(\ell) = \mathbb{R}$.*



2. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ ein reeller Kreis und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Dann ist $f(S)$ ein reeller Kreis. Außerdem, existiert eine komplexe affine Transformation $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, so dass $g(S) = S^1$.



Beweis. 1. Wir können die komplexe affine Transformation f als die relle affine Transformation $\Phi(f)$ betrachten. Insbesondere, wissen wir dass reelle affine Transformationen reelle Geraden nach reelle Geraden schicken. Außerdem wissen wir, dass jede relle Translation und reelle Drehung durch eine komplexe affine Transformation realisiert werden kann. Durch eine reelle Translation, können wir annehmen, dass die Gerade ℓ durch 0 geht. Dann können wir durch eine reelle Drehung die reelle Gerade ℓ in die reelle Achse $\mathbb{R}$ bringen.

2. Wir betrachten nochmal f als die reelle affine Transformation $\Phi(f)$: diese ist die Komposition einer Tranlation, einer lineare reelle Drehung und einer zentrische Streckung. Man zeigt leicht dass Translationen und Drehungen reelle Kreisen nach reelle Kreisen schicken, da diese Isometrien von $\mathbb{R}^2$ sind. Wir müssen nun zeigen dass eine zentrische Streckung der Form $f(z) = \lambda \cdot z, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ Kreisen nach Kreisen schickt. Sei $S = S_{z_0,r} = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, dann

$$\begin{aligned} w \in f(S_{z_0,r}) &\iff f^{-1}(w) \in S_{z_0,r} \iff |\lambda \cdot w - z_0| = r \iff |w - \lambda^{-1} z_0| = \lambda^{-1} r \\ &\iff w \in S_{\lambda^{-1} z_0, \lambda^{-1} r} \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $f(S_{z_0,r}) = S_{\lambda^{-1} z_0, \lambda^{-1} r}$ ein reeller Kreis ist.

Wir wissen dass jede reelle Translation und jede reelle zentrische Streckung durch eine komplexe affine Transformation realisiert werden kann: durch eine Translation können wir den Mittelpunkt z_0 von $S_{z_0,r}$ nach 0 bringen. Wir nehmen nun an, dass $S = S_{0,r}$. Dann wenn wir die zentrische Streckung $f(z) = \frac{1}{r} z$ anwenden, sehen wir, dass $f(S_{0,r}) = S_{0,1} = S^1$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 7.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

2.6.2 Die reelle Geometrie der projektiven komplexen Gerade

Wir betrachten nun die komplexe projektive Gerade als die Vereinigung von $\mathbb{C}$ und dem Fernpunkt:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_1 \cup \{[1,0]\} = \{[z,1] \mid z \in \mathbb{C}\} \sqcup \{[1,0]\} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$$

Wir betrachten auch die Gruppe $PGL_2(\mathbb{C})$ von alle Möbiustransformationen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Jede Möbiustransformation kann als gebrochene lineare Funktion dargestellt werden:

$$f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

Insbesondere können wir $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ als Teilmenge von $PGL_2(\mathbb{C})$ betrachten:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow PGL_2(\mathbb{C}), \quad (f(z) = az + b) \mapsto \left(f(z) = \frac{az+b}{0z+1} \right)$$

Lemma 2.6.7. *Als Untergruppen von $PGL_2(\mathbb{C})$ gilt dass*

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \{f \in PGL_2(\mathbb{K}) \mid f(\infty) = \infty\}.$$

Beweis. ($\subseteq$): Sei $f(x) = \frac{az+b}{0z+d} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, dann $f(\infty) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty$.

($\supseteq$): Sei $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, so dass

$$f(\infty) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty.$$

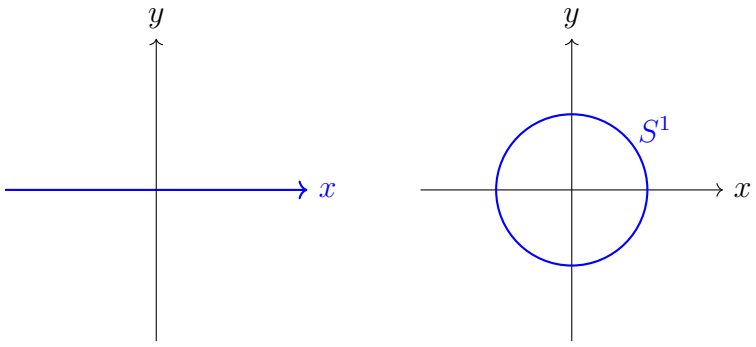
Das bedeutet $c = 0$, so dass $f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. □

Wir haben früher gezeigt, dass jede komplexe affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ reelle Geraden nach reelle Gerade schickt und reelle Kreise nach reelle Kreise. Wenn wir nicht nur affine Transformationen, aber auch Möbiustransformationen verwenden, können wir reelle Geraden in reelle Kreise verwandeln:

Beispiel 2.6.8 (Cayley-Transformation)**.** Wir betrachten die sogenannte Cayley-Transformation:

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

und wir wollen zeigen, dass $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$.



Wenn $x \in \mathbb{R}$, sehen wir, dass $f(x) = \frac{x-i}{x+i} \in \mathbb{C}$, weil $x + i \neq 0$. Außerdem

$$|x - i| = \sqrt{x^2 + 1} = |x + i|$$

so dass

$$|\frac{x-i}{x+i}| = \frac{|x-i|}{|x+i|} = 1$$

Das zeigt, dass $f(x) \in S^1$. Wir sehen auch, dass $f(\infty) = \frac{1}{1} = 1 \in S^1$.

Dies hat Auswirkungen auf das Doppelverhältnis:

Korollar 2.6.9. *1. Sei $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle Gerade und seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \ell \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie, dass $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist.*

2. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ ein reeller Kreis und seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S$. Zeigen Sie, dass $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist.

Beweis. 1. Wir können eine komplexe affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ finden so dass $f(\ell) = \mathbb{R}$. Wenn wir f als Möbiustransformation betrachten, sehen wir, dass $f(\infty) = \infty$, so dass $f(\ell \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Da Möbiustransformationen das Doppelverhältnis unverändert lassen, können wir annehmen, dass $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Die Formeln fürs Doppelverhältnis zeigen nun dass $(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

2. Wir können eine komplexe affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ finden so dass $f(S) = S^1$. Wenn wir f als Möbiustransformation betrachten, wissen wir dass das Doppelverhältnis unverändert ist. Dann können wir annehmen, dass $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^1$. Sein nun $g \in PGL_2(\mathbb{C})$ die inverse der Cayley-Transformation: wir wissen dass $g(S^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2); g(z_3), g(z_4))$ und wir haben schon gezeigt dass dieses reell ist. □

Wir können dieses Ergebnis verallgemeinern:

Definition 2.6.10 (Verallgemeinerter Kreis)**.** Ein verallgemeinerter Kreis in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist entweder ein reeller Kreis $S \subseteq \mathbb{C}$ oder eine Teilmenge $\ell \cup \{\infty\}$, mit $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle affine Gerade.

Lemma 2.6.11. *Seien $S, S' \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zwei verallgemeinerte Kreise. Dann existiert eine $f \in PGL_2(\mathbb{C})$ so dass $f(S) = S'$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen dass eine Möbiustransformation f existiert, so dass $f(S) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn S ein reeller Kreis ist, dann existiert eine affine Transformation die S nach S^1 schickt. Denn schickt die inverse der Cayley-Transformation S^1 nach $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wenn $S = \ell \cup \{\infty\}$, mit ℓ eine relle Gerade, dann existiert eine affine Transformation f so dass $f(\ell) = \mathbb{R}$. Da f affin ist, haben wir $f(\infty) = \infty$, so dass $f(\ell \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. □

Satz 2.6.12. *Eine Möbiustransformation $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ schickt verallgemeinerte Kreise nach verallgemeinerte Kreise.*

Beweis. Wir führen den Beweis in Schritten.

- (*Affine Transformationen*): Wenn $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ wissen wir dass f Kreisen nach Kreisen schickt. Außerdem, sei $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle Gerade. Wir haben schon gezeigt dass $f(\ell)$ eine relle Gerade ist, und dass $f(\infty) = \infty$, so dass $f(\ell \cup \{\infty\}) = f(\ell) \cup \{\infty\}$ ein verallgemeinerter Kreis ist.

- (*Einschränkung auf* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$): Sei nun $S \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein verallgemeinerter Kreis und sei $f \in PGL_2(\mathbb{C})$. Wir wollen zeigen, dass $f(S)$ ein verallgemeinerter Kreis ist. Es gibt eine $g \in PGL_2(\mathbb{C})$ so dass $g(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S$, so dass $f(S) = (g \circ f)(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Wir können annehmen, dass $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- ($\infty \in f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$): Insbesondere, wenn $f(\infty) = \infty$, wissen wir dass f affin ist, und dass $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \ell \cup \{\infty\}$ für eine reelle Gerade ℓ. Wenn $f(\infty) \neq \infty$, dann können wir f durch $f \circ t_{-f(\infty)}$ ersetzen, da wir wissen, dass affine Transformationen verallgemeinerte Kreise an verallgemeinerte Kreise senden. Wir können dann annehmen, dass $f(\infty) = 0$. Wir wissen auch, dass es $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z_0) = \infty$. Da die Translation t_{z_0} $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ invariant lässt, können wir f durch $t_{z_0} \circ f$ ersetzen und annehmen, dass $f(0) = \infty$. Dies impliziert, dass f die folgende Form hat:

  $$f(z) = \frac{b}{c \cdot z} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{z}, \qquad b, c \in \mathbb{C}^\times$$

  Durch eine Komposition mit der affine Transformation $z \mapsto \frac{c}{b} z$, können wir annehmen, dass

  $$f(z) = \frac{1}{z}$$

und für diese Transformation sehen wir dass $f(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ein verallgemeinerter Kreis ist.

- ($\infty \notin f(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$): in diesem Fall, sind $f(\infty), f(0) \in \mathbb{C}$. Es gibt eine affine Transformation $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ so dass $g(f(\infty)) = 0, g(f(0)) = 1$. Bis zur Ersetzung von f durch $f \circ g$ können wir annehmen, dass $f(\infty) = 0, f(0) = 1$. Dann hat f die Form

$$f(z) = \frac{d}{cz+d} = \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{z + c^{-1}d} \text{ für } c, d \in \mathbb{C}^\times.$$

Durch eine Komposition mit der affine Transformation $z \mapsto \frac{c}{d}z$, können wir annehmen, dass

$$f(z) = \frac{1}{z+d}$$

Die Annahme $\infty \notin f(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ zeigt, dass $x + d \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass d nicht reell ist: $d = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0$. Da die affine Transformation $t_u \colon z \mapsto z + u$ die reelle Achse erhaltet, können wir f mit $f \circ t_{-u}$ ersetzen, so dass

$$f(z) = \frac{1}{z+iv}.$$

Am Schluss können wir leicht überprüfen dass $f(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ der Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2iv}$ und Radius $|\frac{1}{2iv}|$ ist: $f(\infty) = 0$ und

$$|\frac{1}{x+iv} - \frac{1}{2iv}| = |\frac{-x+iv}{(x+iv)2iv}| = |\frac{-x+iv}{x+iv}| \cdot |\frac{1}{2iv}| = |\frac{1}{2iv}| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

□

Korollar 2.6.13. *Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ voneinander verschieden. Das Doppelverhältnis $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ ist reel genau dann, wenn die Punkte auf einem gemeinsamen verallgemeinerten Kreis liegen.*

Beweis. Wenn die Punkte auf einem gemeinsamen verallgemeinerten Kreis liegen, haben wir schon gezeigt dass das Doppelverhältnis reel ist. Andererseits, sei $f \in PGL_2(\mathbb{C})$ die einzige Möbiustransformation so dass $f(z_1) = \infty, f(z_2) = 0, f(z_3) = 1$. Das Doppelverhältnis ist denn $(z_1, z_2; z_3, z_4) = f(z_4)$, und wenn $f(z_4) \in \mathbb{R}$, dann $z_1, z_2, z_3, z_4 \in f^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$. Der vorheriger Satz zeigt dass $f^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ ein verallgemeinerte Kreis ist. □

Als Konsequenz aus dem Beweis des Satzes ergibt sich auch, dass:

Proposition 2.6.14. *Jede Möbius-Transformation ist die Komposition aus einer Translation, einer Drehung, einer zentrischen Streckung und der Inversion:*

$$\iota \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \qquad z \mapsto \frac{1}{z}$$

Beweis. Wir wiederholen den Beweis, weil dies ein wichtiges Ergebnis ist. Sei f eine Möbiustransformation: wenn $f(\infty) = \infty$, dann ist f affin, so dass f die Komposition von Translationen, Drehungen und zentrische Streckungen ist. Wenn, $f(\infty) \neq \infty$, seien $z_0 = f(\infty)$ und $w_0 = f^{-1}(\infty)$. Dann hat die Möbiustransformation

$$h = t_{-z_0} \circ f \circ t_{w_0}$$

hat die Eigenschaften $h(0) = t_{-z_0}(f(w_0)) = t_{-z_0}(\infty) = \infty$, und $h(\infty) = t_{-z_0}(f(\infty)) = t_{-z_0}(z_0) = 0$. Dann hat h die Form

$$h(z) = \frac{b}{cz} = \frac{b}{c} \cdot \iota(z)$$

für $b, c \in \mathbb{C}^\times$. Die affine Abbildung $g(z) = \frac{b}{c} \cdot z$ ist eine Komposition von Translationen, Drehungen und zentrische Streckungen, und am Ende sehen wir, dass

$$f = t_{z_0} \circ h \circ t_{-w_0} = t_{z_0} \circ g \circ \iota \circ t_{-w-0}$$

eine Komposition von Translationen, Drehungen, zentrische Streckungen und der Inversion ι ist. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 10.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

2.6.3 Orthogonale verallgemeinerte Kreise

Wir wollen ein bisschen mehr über Winkel sprechen. Seien zuerst $\ell, m \subseteq \mathbb{C}$ zwei reelle Geraden: wir sagen, dass die zwei Gerade orthogonal sind, falls sie als Geraden in $\mathbb{R}^2$ orthogonal sind.

Bemerkung 2.6.15. Seien $\ell, m \subseteq \mathbb{C}$ zwei orthogonale reelle Geraden, und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Dann sind $f(\ell), f(m)$ orthogonal, da f winkeltreu ist, wenn wir sie als eine reelle affine Abbildung interpretieren.

Definition 2.6.16 (Tangente)**.** Sei $S = S_{z_0,r} \subseteq \mathbb{C}$ ein reeller Kreis mit Mittelpunkt z_0, und sei $P \in S$. Die Tangente an S durch P ist die einzige reelle Gerade ℓ durch P, die orthogonal zur reelle Gerade zwischen z_0 und P ist.

Sei nun $m \subseteq \mathbb{C}$ eine andere reelle Gerade durch P. Wir sagen dass S und m orthogonal in P sind, falls m und die Tangente ℓ orthogonal sind.

Lemma 2.6.17.

1. *Eine reelle Gerade und ein reeller Kreis in $\mathbb{C}$ treffen sich in höchstens zwei Punkten, und sie treffen sich nur dann in genau einem Punkt, wenn die Gerade die Tangente an den Kreis in diesem Punkt ist.*

2. *Eine reelle Gerade und ein reeller Kreis sind orthogonal,genau dann, wenn die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft.*

Beweis. Durch eine Translation und eine zentrische Streckung (beide komplexe affine Transformationen, die die Orthogonalität nicht andern), können wir annehmen dass der Kreis der Einheitskreis S^1 ist. Wir können nun $z_0 \in \ell$ nehmen, so dass die relle Gerade $\ell(0, z_0)$ und ℓ orthogonal sind: $\ell = \{z_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, mit z_0 und v orthogonal, wenn wir sie als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ betrachten. Wir können auch annehmen, dass $|v| = 1$.

1. Wir sehen, dass $|z_0 + tv| = 1$ genau dann, wenn $|z_0|^2 + t^2|v|^2 = 1$, und das bedeutet $t^2 = 1 - |z_0|^2$. Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, falls $|z_0| > 1$, zwei verschiedene reelle Lösungen falls $|z_0| < 1$ und eine Lösung $t = 0$, falls $|z_0| = 1$. Das passiert, genau dann, wenn die Gerade ℓ die Tangente an S^1 durch z_0 ist.

2. Die einzige Gerade, die durch einen Punkt $P \in S^1$ verläuft und orthogonal zur Tangente ist, ist die Gerade durch P und den Mittelpunkt des Kreises.

□

Definition 2.6.18 (Orthogonale Kreise)**.** Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei reelle Kreisen und sei $P \in S_1 \cap S_2$. Die zwei Kreisen sind orthogonal in P, falls die zwei Tangenten durch P orthogonal sind.

Lemma 2.6.19. *1. Zwei verschiedene Kreise treffen sich in höchstens zwei verschiedenen Punkten.*

2. Wenn sich zwei Kreise in einem Schnittpunkt treffen und orthogonal sind, dann treffen sie sich auch in einem anderen Punkt und sind dort orthogonal.

Beweis. Wir können wie früher annehmen, dass ein Kreis der Einheitskreis $S_1 = S^1$ ist. Durch eine Drehung, können wir dann annehmen dass der Kreis S_2 ein Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat. Sei auch r der Radius von S_2.

1. Wenn $x_0 = 0$, dann $r \neq 1$ und $S^1 \cap S_2 = \emptyset$. Wenn $x_0 \neq 0$, sei $z = x + iy$. Dann $z \in S^1 \cap S_2$ genau dann, wenn $|z| = 1$ und $|z - x_0| = r$. Wir können beide Seiten von diese Gleichungen quadrieren, und wir bekommen die äquivalente Gleichungen

$$x = \frac{x_0^2 + 1 - r^2}{2x_0}, \qquad y^2 = 1 - \left(\frac{x_0^2 + 1 - r^2}{2x_0}\right)^2$$

   Diese Gleichungen haben keine reelle Lösung, falls $(x_0 - 1)^2 > r^2$, zwei verschiedene reelle Lösungen, falls $(x_0 - 1)^2 > r^2$, und eine reelle Lösung, falls $(x_0 - 1)^2 = r^2$.

2. Wenn S^1 und S_2 in einem gemeinsamen Punkt z orthogonal sind, kann man leicht feststellen, dass sie sich auch im Punkt $\overline{z}$ treffen und dass sie dort orthogonal sind: die Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ ist nicht komplex affin, aber sie ist dennoch eine Isometrie, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ interpretiert. Wir müssen nur zeigen, dass $z \neq \overline{z}$. Wenn dies nicht der Fall ist, dann ist $z = x \in \mathbb{R}$, aber dann ist es einfach zu sehen, dass die beiden Kreise die gleiche Tangente an dem Punkt haben müssen: die vertikale Linie $\{x + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$. Dann können die Kreise nicht orthogonal zu z sein.

□

Definition 2.6.20 (Orthogonale verallgemeinerte Kreise)**.** Seien $\ell, m \subseteq \mathbb{C}$ zwei reelle Geraden. Wir sagen, dass $\ell \cup \{\infty\}, m \cup \{\infty\}$ orthogonal in ∞ sind, falls ℓ, m orthogonal sind.

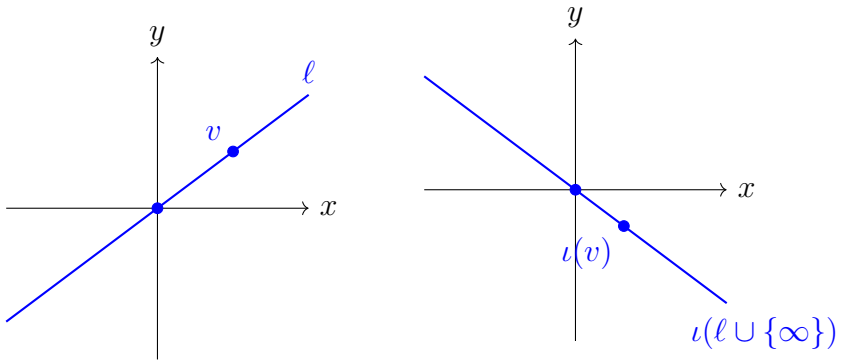
Wir wollen nun zeigen

Satz 2.6.21. *Eine Möbius-Transformation verwandelt orthogonale verallgemeinerte Kreise in orthogonale verallgemeinerte Kreise*

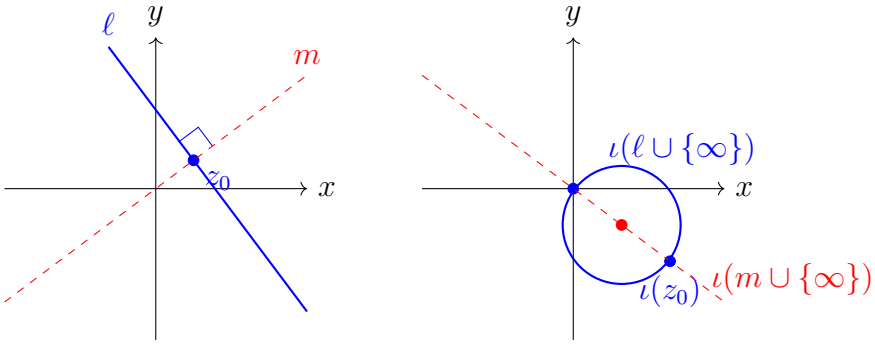
Idee. Diese Aussage lässt sich für komplexe affine Transformationen relativ leicht beweisen, da diese orthogonale reelle Geraden auf orthogonale reelle Geraden übertragen. Da jede Möbius-Transformation die Komposition aus affinen komplexen Transformationen und der Inversion ist, genügt es, die Aussage für die Inversion zu beweisen. Im Falle der Inversion können wir dies tun, indem wir explizit die Bilder der verschiedenen verallgemeinerten Kreise berechnen. Das ist der Inhalt des folgenden Lemmas:

Lemma 2.6.22. *Wir betrachten die Bilder der verallgemeinerten Kreise durch die Inversion* $\iota\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \iota(z) = \frac{1}{z}$*:*

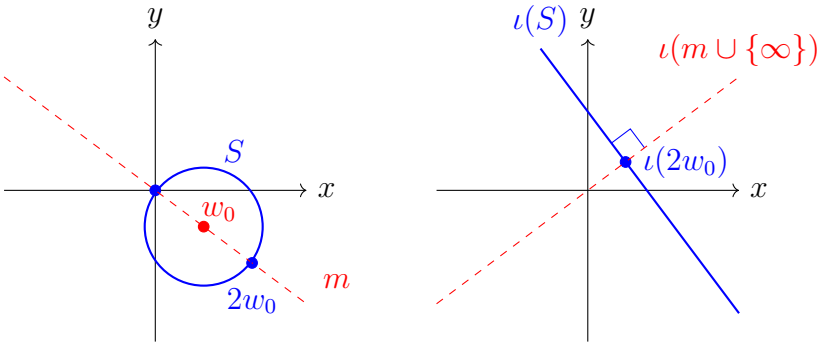
1. *Sei* $\ell = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ *eine reelle Gerade so dass* $0 \in \ell$, *mit* $v \in \mathbb{C}^\times$, *und sei* $\ell' = \{s \cdot \iota(v) \mid s \in \mathbb{R}\}$. *Dann*
$$\iota(\ell \cup \{\infty\}) = \ell' \cup \{\infty\}.$$



2. *Sei* ℓ *eine reelle Gerade so dass* $0 \notin \ell$, *und sei* $z_0 \in \ell$, *so dass* ℓ *und die reelle Gerade* m *durch* 0 *und* z_0 *orthogonal sind. Dann ist* $\iota(\ell \cup \{\infty\})$ *ein Kreis mit* 0 *und* $\iota(z_0)$ *als Endpunkten eines Durchmessers:*
$$\iota(\ell \cup \infty) = S_{\frac{1}{2}\iota(z_0), \frac{1}{2}|\iota(z_0)|}$$

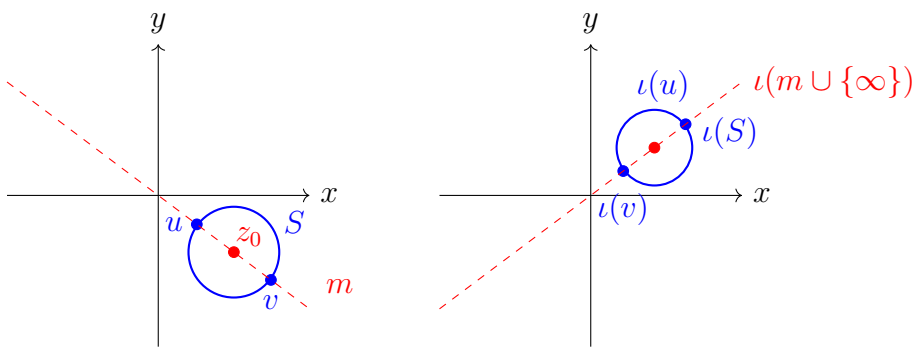


3. *Sei* $S = S_{w_0, |w_0|}$ *ein reeller Kreis so dass* $0 \in S$, *und sei* m *die reelle Gerade durch* 0 *und dem Mittelpunkt* w_0, *so dass* $m \cap S = \{0, 2 \cdot w_0\}$. *Sei auch* $\ell \subseteq \mathbb{C}$ *die einzige reelle Gerade durch* $\iota(2w_0)$ *und orthogonal zu* $\iota(m)$. *Dann*
$$\iota(S) = \ell \cup \{\infty\}$$



4. *Sei $S = S_{z_0,r}$ ein reeller Kreis, so dass $0 \notin S$. Sei m eine reelle Gerade durch 0 und z_0 (m ist eindeutig, falls $z_0 \neq 0$) und seien $\{u, v\} = m \cap S$. Dann ist $\iota(S)$ ein Kreis mit $\iota(u), \iota(v)$ als Endpunkte eines Durchmessers:*

$$\iota(S) = S_{\frac{1}{2}(\iota(u)+\iota(v)),\frac{1}{2}|\iota(u)-\iota(v)|}$$



Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass $\iota^{-1} = \iota$, so dass der Beweis, dass $\iota(S) = S'$ für zwei Teilmengen $S, S' \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, äquivalent ist zu zeigen, dass $\iota(S) \subseteq S', \iota(S') \subseteq S$

1. Wir sehen, dass $\iota(0) = \infty, \iota(\infty) = 0$, und, wenn $t \in \mathbb{R}^\times$, dann $\iota(tv) = \frac{1}{t} \cdot \iota(v)$. Das zeigt, dass $\iota(\ell \cup \{\infty\}) \subseteq \ell' \cup \{\infty\}$, und der gleiche Beweis, zeigt dass $\iota(\ell' \cup \{\infty\}) \subseteq \ell \cup \{\infty\}$, so dass wir fertig sind.

2. Wir schreiben $\ell = \{z_0 + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, mit z_0, v orthogonal, als Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Wir können auch annehmen, dass $|v| = 1$. Dann für $t \in \mathbb{R}$ haben wir $z_0 + tv \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned}|\iota(z_0 + tv) - \frac{1}{2}\iota(z_0)| &= |\frac{1}{z_0 + tv} - \frac{1}{2z_0}| = |\frac{2z_0 - z_0 - tv}{2z_0(z_0 + tv)}| \\ &= |\frac{z_0 - tv}{2z_0(z_0 + tv)}| = \frac{1}{2|v_0|} \cdot |\frac{z_0 - tv}{z_0 + tv}| = \frac{1}{2|v_0|}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass $|z_0 - tv| = |z_0 + tv|$, und das gilt weil z_0 und v orthogonal als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind, so dass $|z_0 - tv| = \sqrt{|z_0|^2 + |v|^2} = |z_0 + tv|$. Das bedeutet, dass

$$\iota(\ell) \subseteq S_{\frac{1}{2}\iota(z_0),\frac{1}{2}|\iota(z_0)|}$$

und, da $\iota(\infty) = 0$, haben wir, dass $\iota(\ell \cup \{\infty\}) \subseteq S_{\frac{1}{2}\iota(z_0),\frac{1}{2}|\iota(z_0)|}$. Um die Gleichung zu zeigen, können wir verwenden, dass $\iota(\ell \cup \{\infty\})$ ein verallgemeinerter Kreis ist, und dass sich zwei verschiedene verallgemeinerte Kreise nicht in mehr als zwei Punkten treffen können. Wenn wir dies nicht verwenden wollen, können wir auch direkt die Inklusion $\iota(S_{\frac{1}{2}\iota(z_0),\frac{1}{2}|\iota(z_0)|}) \subseteq \ell \cup \{\infty\}$ beweisen. Wir sehen, dass $\iota(0) = \infty$. Sei nun, $w \in S_{\frac{1}{2}\iota(z_0),\frac{1}{2}|\iota(z_0)|}, w \neq 0$: wir wollen zeigen, dass $\iota(w) \in \ell$.Das bedeutet, dass $\iota(w) - z_0$ orthogonal zu z_0 ist. Wir sehen, dass

$$w = \frac{1}{2z_0} + \frac{1}{2|z_0|}u = \frac{|z_0| + z_0 u}{2z_0|z_0|}, \qquad \text{mit } |u| = 1.$$

Wir rechnen auch, dass

$$\iota(w) - z_0 = \frac{1}{w} - z_0 = z_0 \cdot \frac{|z_0| - z_0 u}{|z_0| + z_0 u} = z_0 \cdot \frac{1 - u'}{1 + u'}, \qquad u' = u\frac{z}{|z_0|}$$

Wenn wir zeigen, dass

$$\frac{1-u'}{1+u'} = iy, \qquad y \in \mathbb{R}$$

dann sind wir fertig, da die Skalarmultiplikation mit i, die Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist, so dass z_0 und iz_0y orthogonal sind. Wir sehen, dass $|u'| = 1$, so dass $\overline{u'} = (u')^{-1}$. Dann

$$\overline{\frac{1-u'}{1+u'}} = \frac{1-(u')^{-1}}{1+(u')^{-1}} = \frac{u'-1}{u'+1} = -\frac{1-u'}{1+u'}$$

das bedeutet, dass $\frac{1-u'}{1+u'}$ kein reeller Teil hat, und wir sind fertig.

3. Dies ist dasselbe wie Punkt (ii), wenn wir $w_0 = \frac{1}{2}\iota(z_0)$ setzen.

4. Nehmen wir zuerst an, dass $z_0 = 0$. Dann $m \cap S = \{u, -u\}$ für ein u mit $|u| = r$. Dann $\iota(u) = \frac{1}{u}, \iota(-u) = -\frac{1}{u}$ und $\iota(u) + \iota(-u) = 0$, und $|\iota(u) - \iota(-u)| = \frac{1}{r}$. Wenn $z \in S$, dann $|\iota(z)| = \frac{1}{r}$ so dass $\iota(S) \subseteq S_{0,r^{-1}}$. Die gleiche Argumentation zeigt, dass $\iota(S_{0,r^{-1}}) \subseteq S$, und wir sind fertig.

   Nehmen wir nun an, dass $z_0 \neq 0$. Wir haben dass $S = \{z_0 + r \cdot w \,|\, w \in S^1\}$, und

$$u = z_0 - r\frac{z_0}{|z_0|} = \frac{|z_0|z_0 - rz_0}{|z_0|} \qquad w = z_0 + r\frac{z_0}{|z_0|} = \frac{|z_0|z_0 + rz_0}{|z_0|}$$

   so dass

$$\iota(u) = \frac{|z_0|}{|z_0|z_0 - rz_0} = \frac{|z_0|}{z_0} \cdot \frac{1}{|z_0| - r}, \qquad \iota(v) = \frac{|z_0|}{|z_0|z_0 + rz_0} = \frac{|z_0|}{z_0} \cdot \frac{1}{|z_0| + r},$$

   und

$$\frac{1}{2}(\iota(u) + \iota(v)) = \frac{|z_0|}{z_0} \cdot \frac{|z_0|}{|z_0|^2 - r^2}, \qquad \frac{1}{2}|\iota(u) - \iota(v)| = |\frac{|z_0|}{z_0} \cdot \frac{r}{|z_0|^2 - r^2}| = \frac{r}{||z_0|^2 - r^2|}$$

   Wir berechnen nun für $w \in S^1$, dass

$$\begin{aligned}|\frac{1}{z_0 + rw} - \frac{|z_0|}{z_0} \cdot \frac{|z_0|}{|z_0|^2 - r^2}| &= |\frac{z_0(|z_0|^2 - r^2) - |z_0|^2(z_0 + rw)}{(z_0 + rw)z_0(|z_0|^2 - r^2)}| = |\frac{-z_0r^2 - |z_0|^2rw}{(z_0 + rw)z_0(|z_0|^2 - r^2)}| \\ &= |z_0| \cdot r \cdot |\frac{\frac{z_0}{|z_0|}r + |z_0|w}{(z_0 + rw)z_0(|z_0|^2 - r^2)}| = \frac{r}{||z_0|^2 - r^2|} \cdot |\frac{\frac{z_0}{|z_0|}r + |z_0|w}{(z_0 + rw)}|\end{aligned}$$

   Wir müssen zeigen, dass $|\frac{z_0}{|z_0|}r + |z_0|w| = |z_0 + rw|$. Schreiben wir $\frac{z}{|z_0|} = w'$ und $|z_0| = r'$: wir müssen nun zeigen, dass

$$|rw' + r'w| = |r'w' + rw|$$

   Wenn wir w, w' als Vektoren mit Norm 1 in $\mathbb{R}^2$ interpretieren, sehen wir, dass

$$|rw' + r'w|^2 = r^2 + (r')^2 + 2rr'\langle w, w'\rangle = |r'w' + rw|^2$$

   Das zeigt, dass $\iota(S) \subseteq S_{\frac{1}{2}(\iota(u)+\iota(v)),\frac{1}{2}|\iota(u)+\iota(v)|}$. Die gleiche Argumentation, zeigt dass $\iota(S_{\frac{1}{2}(\iota(u)+\iota(v)),\frac{1}{2}|\iota(u)-\iota(v)|}) \subseteq S$, und wir sind fertig.

□

Da wir das Verhalten der Inversion auf verallgemeinerten Kreisen explizit kennen, können wir explizit überprüfen, dass sie orthogonale verallgemeinerte Kreise in orthogonale verallgemeinerte Kreise überführt, aber wir tun es nicht explizit

□

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 14.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Kapitel 3

Hyperbolische Geometrie

3.1 Axiomatische Geometrie: Inzidenzgeometrie

Kehren wir zu unserem ersten Beispiel für „geometrische“ Objekte zurück: Punkte und Linien in der Ebene. Unsere Sichtweise basierte auf kartesischen Koordinaten: Mit ihnen konnten wir die affine Geometrie hauptsächlich über die lineare Algebra behandeln. Diese Sichtweise ist jedoch in der Geschichte der Mathematik relativ neu, da kartesische Koordinaten erst im 17. Jahrhundert eingeführt wurden. Natürlich haben die Mathematiker die Geometrie der Ebene schon viel früher untersucht. Schließlich ist die zweidimensionale Geometrie selbst für ein kleines Kind, das auf ein Stück Papier zeichnet, irgendwie “natürlich”. Aber auch wenn jeder eine intuitive Vorstellung davon hat, was Geometrie ist, braucht die Mathematik solide und strenge Grundlagen, um zu funktionieren. Mathematiker haben in der Vergangenheit versucht, die Essenz dieser Intuition in Axiome zu fassen, aus denen sie über die Logik weitere Eigenschaften ableiten konnten. Das berühmteste Beispiel für diesen Ansatz ist die Abhandlung „Elemente“ des griechischen Mathematikers Euklid. Dies hatte enormen Einfluss auf die Geschichte der Mathematik.

Hier werden wir kurz die axiomatische Sichtweise nur für die einfachste Art der Geometrie, die sogenannte „Inzidenzgeometrie“, diskutieren. Der Zweck der (ebenen) Inzidenzgeometrie besteht darin, die Geometrie von Geraden und Punkten in einer Ebene durch Axiome zu formalisieren. Schon vorher muss man sich auf eine Definition dessen einigen, was Linien und Punkte sind. Für Euklid waren dies gewissermaßen „natürliche Begriffe“ ohne eine wirklich präzise Definition.

In der moderneren Mathematik können wir die Sprache der Mengenlehre verwenden: der erster Axiom ist

- **Mengenpostulat:** Es gibt eine Menge $\mathcal{P}$, die wir **Ebene** nennen und bestimmte Teilmengen $L \subseteq \mathcal{P}$ die wir **Geraden** nennen. Die Elementen von $\mathcal{P}$ nenne wir **Punkte**.

Wir sagen dass ein Punkt P auf einer Gerade L **liegt**, oder dass L **durch** P **geht**, wenn $P \in L$. Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind **kollinear** wenn sie auf einer gemeinsame Gerade L liegen.

Die andere zwei Axiome der Inzidenzgeometrie beschreiben die Eigenschaften die Punkten und Geraden erfüllen müssen:

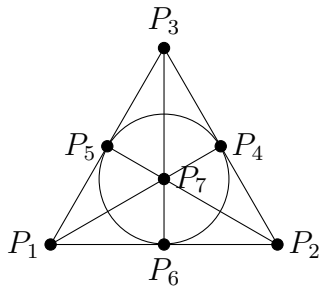
- **Existenzpostulat:** Es gibt mindestens drei nicht kollineare Punkte in der Ebene.
- **Eindeutige-Gerade-Postulat:** Durch zwei verschiedene Punkte P, Q geht genau eine Gerade, die wir mit $L(P, Q)$ bezeichnen.

Definition 3.1.1 (Inzidenzgeometrie)**.** Ein Modell der Inzidenzgeometrie ist eine Ebene $\mathcal{P}$ mit Geraden $L \subseteq \mathcal{P}$ die das Mengenpostulat, das Existenzpostulat und das Eindeutige-Gerade-Postulat erfüllen.

Beispiel 3.1.2 (Affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ mit den affinen Geraden ist ein Modell der Inzidenzgeometrie.

Beispiel 3.1.3 (Projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ mit den projektiven Geraden ist ein Modell der Inzidenzgeometrie.

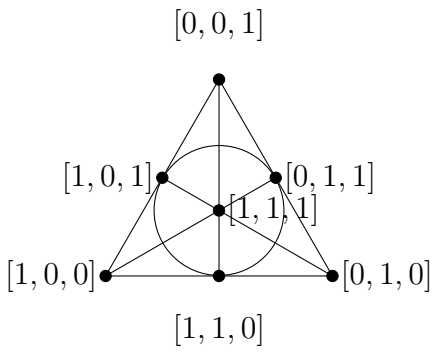
Beispiel 3.1.4 (Die Fano-Ebene)**.** Die Fano Ebene besteht auf sieben Punkte und sieben Geraden wie im Bild: die Geraden sind die Strecke und der Kreis.



Genauer gesagt, ist die Fano Ebene eine Menge $\mathcal{P}_{\text{Fano}} = \{P_1, \ldots, P_7\}$ mit Geraden

$$\{P_1, P_2, P_6\},\ \{P_2, P_3, P_4\},\ \{P_1, P_3, P_5\},\ \{P_1, P_4, P_7\},\ \{P_2, P_5, P_7\},\ \{P_3, P_6, P_7\},\ \{P_4, P_5, P_6\}.$$

Man sieht leicht dass die Fano Ebene ein Modell der Inzidenzgeometrie ist. Eigentlich kennen wir diesen Modell schon: es ist die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ auf den Körper $\mathbb{F}^2$ mit zwei Elementen.



Zum Beispiel, sind die Punkte $[1,0,1], [0,1,1], [1,1,0]$ auf der Gerade $\{x+y+z=0\}$. Wir sehen aus den Bildern dass $\mathcal{P}_{\text{Fano}}$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ "gleich" sind. Um das besser zu sagen, führen wir die folgende Definition ein:

Definition 3.1.5 (Isomorphismus von Modellen)**.** Zwei Modellen $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ der Inzidenzgeometrie sind isomorph wenn eine bijektive Abbildung $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ existiert so dass, wenn $L \subseteq \mathcal{P}, L' \subseteq \mathcal{P}'$ Geraden sind, dann sind $f(L) \subseteq \mathcal{P}'$ und $f^{-1}(L') \subseteq \mathcal{P}$ auch Geraden. Die Abbildung f heißt Isomorphismus von Modellen.

Beispiel 3.1.6. Man sieht, dass die Abbildung $f\colon \mathcal{P}_{\text{Fano}} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ so dass

$$\begin{aligned} &f(P_1) = [1,0,0], && f(P_2) = [0,1,0], && f(P_3) = [0,0,1], \\ &f(P_4) = [0,1,1], && f(P_5) = [1,0,1], && f(P_6) = [1,1,0], \\ & && f(P_7) = [1,1,1] && \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Modellen der Inzidenzgeometrie ist.

Beispiel 3.1.7. Wir betrachten die Menge $\mathcal{P} = \mathbb{R} \cup \{\star\}$, mit $\star \notin \mathbb{R}$. Die Geraden in $\mathcal{P}$ sind entweder die Teilmenge $\mathbb{R}$ oder die Teilmengen $\{\star, t\}$, mit $t \in \mathbb{R}$. Das ist ein Modell der Inzidenzgeometrie: durch zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ geht eine einzige Gerade, entweder $\mathbb{R}$, falls $p, q \in \mathbb{R}$ oder $\{p, q\}$ falls $p = \star$ oder $q = \star$. Das zeigt auch, dass die drei Punkte $0, 1, \star$ nicht kollinear sind.

Jedes Ergebnis, das sich nur aus den drei Axiomen der Inzidenzgeometrie ableiten lässt, gilt für jedes Modell der Inzidenzgeometrie: z.B.

Beispiel 3.1.8. Sei $\mathcal{P}$ ein Modell der Inzidenzgeometrie:

1. Seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ drei nicht-kollineare Punkte. Dann sind A, B, C paarweise verschiedene.

   Beweis. Wenn $A = B$, dann enthält die Gerade $L(A, C)$ alle drei Punkte, so dass die Punkte kollinear sind. Die andere Fälle sind ähnlich. □

2. Seien $A, B \in \mathcal{P}$ zwei verschiedene Punkte. Dann existiert ein Punkt C so dass A, B, C nicht kollinear sind.

   Beweis. Ein Punkt $C \in \mathcal{P}$ ist nicht-kollinear mit A, B genau dann, wenn $C \notin L(A, B)$. Wenn solche Punkt nicht existiert, dann liegen alle Punkte auf $L(A, B)$ aber das ist unmöglich, da drei nicht kollinear Punkte existieren. □

3. Sei $A \in \mathcal{P}$ ein Punkt. Dann existiert eine Gerade die A nicht enthält.

   Beweis. Wir wissen dass drei nicht kollineare Punkte existieren, und wir haben gezeigt dass drei nicht-kollineare Punkte paarweise verschiedene sind. Insbesondere existiert ein Punkt $B \neq A$. Dann haben wir gezeigt dass ein Punkt C existiert, so dass A, B, C nicht kollinear sind. Dann $A \notin L(B, C)$. □

4. Sei $L \subseteq \mathcal{P}$ eine Gerade. Dann existiert ein Punkt A der nicht auf L liegt.

   Beweis. Wenn ein solcher Punkt A nicht existiert, dann sind alle Punkte auf L. Das ist unmöglich, da drei nicht-kollineare Punkte existieren. □

Die Ergebnisse der Inzidenzgeometrie sind in der Regel einfach zu beweisen und nicht sehr tiefgründig, aber das ist nicht überraschend, da die Axiome der Inzidenzgeometrie sehr allgemein sind. Um interessantere Geometrien zu erhalten, fügt man weitere Axiome hinzu. Zwei wichtige Axiome sind durch die Beispiele $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ inspiriert:

Definition 3.1.9 (Axiomatische affine und projektive Ebene)**.** Eine axiomatische affine Ebene ist ein Modell der Inzidenzgeometrie mit dem folgenden zusätzliches Postulat:

- **Affines Parallelpostulat**: Seien L eine Gerade und P ein Punkt der nicht auf L liegt. Dann existiert eine einzige Gerade L' durch P, die disjunkt von L ist.

Eine axiomatische projektive Ebene ist ein Modell der Inzidenzgeometrie mit dem folgenden zusätzliches Postulat:

- **Projektives Parallelpostulat**: Seien L eine Gerade und P ein Punkt der nicht auf L liegt. Dann existiert keine einzige Gerade L' durch P, die disjunkt von L ist.

Beispiel 3.1.10. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper: dann ist die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ auch eine axiomatische affine Ebene und ist die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ auch eine axiomatische projektive Ebene. Nicht alle affine und projektive Ebene haben diese Form, wie das folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1.11. Sei $\mathcal{P} = \mathbb{R} \cup \{\star\}$ wie früher. Zwei verschiedene Geraden in $\mathcal{P}$ haben entweder die Form $\{\star, t\}, \{\star, s\}$, mit $s, t \in \mathbb{R}, s \neq t$, oder die Form $\{\star, t\}, \mathbb{R}$, mit $t \in \mathbb{R}$. In beide Fälle, treffen sie sich in genau einem Punkt. Das zeigt, dass $\mathcal{P}$ eine axiomatische projektive Ebene ist. Ist $\mathcal{P}$ isomorph zu einer projektive Ebene mit der Form $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, für ein Körper $\mathbb{K}$? Die Antwort ist Nein. Zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ haben eine Bijektion zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Insbesondere, haben sie die gleiche Mächtigkeit. Die Geraden $\{\star, 0\}$ und $\mathbb{R}$ in $\mathcal{P}$ haben aber verschiedene Mächtigkeiten.

Andere und interessantere Beispiele von axiomatische affine und projektive Ebene, die nicht in der Form $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ oder $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ vorliegen, sind affine und projektive Ebenen über den Quaternionen oder exotischere Beispiele wie die Moufang-Ebene. Es gibt auch verschiedene Beispiele für endliche axiomatische affine und projektive Ebenen, die nicht aus endlichen Körpern stammen. Aus Zeitgründen werden wir diese Beispiele in diesem Kurs nicht weiter behandeln. Wir wollen jedoch ohne Beweis den folgenden wichtigen Satz aufstellen.

Satz 3.1.12. *Eine axiomatische projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist isomorph zu eine projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ über einem Körper $\mathbb{K}$ genau dann, wenn der Satz von Pappos in $\mathcal{P}$ gilt.*

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn wir das Parallelpostulat in eine andere Richtung ändern.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 16.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

3.2 Die Hyperbolische Ebene

Definition 3.2.1 (Axiomatische hyperbolische Ebene)**.** Eine axiomatische hyperbolische Ebene ist ein Modell der Inzidenzgeometrie mit dem folgenden zusätzliches Postulat:

- **Hyperbolisches Parallelpostulat**: Seien L eine Gerade und P ein Punkt der nicht auf L liegt. Dann existieren mindestens zwei verschiedene Geraden L', L'' durch P, die disjunkt von L ist.

Beispiel 3.2.2 (Poincaré-Halbebene-Modell der hyperbolische Ebene)**.** Die Poincaré-Halbebene-Modell der hyperbolische Ebene ist die Menge

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

wir setzen auch $\partial\mathbb{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (betrachten Sie, dass $\partial\mathbb{H} \cap \mathbb{H} = \emptyset$). Die hyperbolische Geraden sind entweder vertikale affine reelle Halbgeraden

$$h\ell_x = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) = x\} = \{x + iy \mid y > 0\} \qquad x \in \mathbb{R},$$

oder Halbkreisen mit Mittelpunkte auf der reelle Achse

$$hS_{x_0,r} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - x_0| = r\} = \{x + iy \mid (x - x_0)^2 + y^2 = r^2\} \qquad x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Anders gesagt, Die hyperbolischen Geraden sind die Schnittmenge von $\mathbb{H}$ mit den verallgemeinerten Kreisen in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die orthogonal zu $\partial\mathbb{H}$ sind.

Wir überprüfen die drei Eigenschaften einer axiomatischer hyperbolischer Ebene:

- *Eindeutige-Gerade-Postulat:* Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ zwei verschiedene Punkte. Wir müssen überprüfen dass diese zwei Punkte auf eine einzige gemeinsame hyperbolische Gerade liegen. Wir schreiben $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ und wir betrachten zwei Fällen:

  Falls $x_1 = x_2$, dann liegen die zwei Punkte auf eine einzige vertikale Halbgerade. Nehmen wir an, dass die Punkte auf einem Halbkreis mit Zentrum $x_0 \in \mathbb{R}$ liegen. Dann

  $$(x_1 - x_0)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_0)^2 + y_2^2$$

  so dass $y_1^2 = y_2^2$ und dann $y_1 \neq y_2$. Das ist unmöglich, da $z_1 \neq z_2$.

  Falls $x_1 \neq x_2$ dann liegen die zwei Punkte auf keiner gemeinsame Halbgerade. Wir wollen zeigen dass die zwei Punkte auf einem einzigen gemeinsame Halbkreis liegen: um den Mittelpunkt des Halbkreises zu finden, wollen wir $x_0 \in \mathbb{R}$ bestimmen so dass

  $$|z_1 - x_0| = |z_2 - x_0|.$$

  Wir können beide Seiten quadrieren und wir bekommen:

  $$\begin{aligned} & (x_1 - x_0)^2 + y_1^2 = (x_2 - x_0)^2 + y_2^2 \\ \iff & x_1^2 + x_0^2 - 2x_1x_0 + y_1^2 = x_2^2 + x_0^2 - 2x_2x_0 + y_2^2 \\ \iff & 2(x_2 - x_1)x_0 = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ \iff & x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2 - x_1}\right). \end{aligned}$$

  Das zeigt, dass x_0 eindeutig ist. Dann ist der Radius $r = |z_1 - x_0|$ auch eindeutig.

- *Existenz-Postulat:* Nehmen wir zwei Punkte auf einer gemeinsame vertikale Halbgerade, z.B. $z_1 = i, z_2 = 2i$, und einem Punkt z_3 der nicht auf diese Halbgerade liegt, z.B. $z_3 = 1+i$. Die einzige hyperbolische Gerade die z_1, z_2 enthält, enthält z_3 nicht. Dann sind z_1, z_2, z_3 nicht kollinear.

- *Hyperbolisches Parallelpostulat*: Nehmen wir eine vertikale Halbgerade $h\ell_a = \{a+ib \mid b > 0\}$ und einem Punkt $z = x + iy$ der nicht auf $h\ell_a$ liegt, so dass $x \neq a$. Die Halbgerade $h\ell_x$ geht durch z und ist disjunkt von $h\ell_a$. Wir können auch viele Halbkreise $hS_{x_0,r}$ finden die z enthalten und disjunkt von $h\ell_a$ sind. Ein Halbkreis, der durch z geht ist von dem Mittelpunkt x_0 bestimmt. Wir müssen dann $x_0 \in \mathbb{R}$ finden so dass

  $$(a - x_0)^2 + b^2 \neq (x - x_0)^2 + y^2, \qquad \text{für alle } b > 0$$

Das ist äquivalent wie früher zu

$$x_0 \neq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}+\frac{y^2-b^2}{x-a}\right), \qquad \text{für alle } b>0.$$

und wir können unendliche viele x_0 mit dieser Eigenschaft finden.

Sei nun $hS_{c,r}$ ein Halbkreis und $z = x+iy \notin hS_{c,r}$. Wir können unendliche viele Halbkreise $hS_{x_0,|x_0-z|}$ finden, die durch z gehen und disjunkt von $hS_{c,r}$ sind: wir betrachten zwei Fälle:

- ($|z-c|<r$): wenn der Mittelpunkt x_0 sehr näh zu c ist, dann sind wir fertig: sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0-c|<\varepsilon$, für ein $\varepsilon>0$, so dass $2\varepsilon < r-|z-c|$. Sei auch $w \in hS_{x_0,|x-z|}$ so dass $|w-x_0| = |x-x_0|$. Dann

  $$|w-c| = |w-x_0+x_0-c| \leq |w-x_0|+|x_0-c| = |z-x_0|+|x_0-c| \leq |z-c|+2|x_0-c \leq |z-c|+2\varepsilon < r.$$

- ($|z-c|>r$): wenn der Mittelpunkt x_0 sehr näh zu c ist, dann sind wir fertig: sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0-c|<\varepsilon$, für ein $\varepsilon>0$, so dass $2\varepsilon < |z-c|-r$. Dann

  $$|w-c| = |w-x_0+x_0-c| \geq ||w-x_0|-|x_0-c|| = ||z-x_0|-|x_0-c||$$

  Wir sehen nun, dass $|z-x_0| \geq ||z-c|-|x_0-c||$ und $|z-c| > 2\varepsilon + r > |x_0-c|$, so dass

  $$|w-c| \geq ||z-x_0|-|x_0-c|| = |z-x_0|-|x_0-c| \geq |z-c|-2|x_0-c| > |z-c|-2\varepsilon > r.$$

Beispiel 3.2.3 (Poincaré-Scheibe-Modell der hyperbolische Ebene)**.** Die Poincaré-Scheibe-Modell der hyperbolische Ebene ist die Einheitsscheibe

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z|<1\}$$

Wir setzen auch $\partial\mathbb{D} = S^1$. Die hyperbolische Geraden in diesem Modell sind die Schnittmengen von $\mathbb{D}$ mit den verallgemeinerten Kreisen in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die orthogonal zu $\partial\mathbb{D}$ sind: sie sind entweder die Sehnen von S^1 durch 0 oder die Kreissegmenten die auf einem Kreis der orthogonal zu $\partial\mathbb{D}$ ist, liegen.

Wir könnten direkt beweisen, dass dieses Modell die Axiome einer axiomatischen hyperbolischen Ebene erfüllt, aber wir werden einen anderen Weg einschlagen. Betrachten wir die Cayley-Transformation und ihre Inverse

$$M, M^{-1}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \qquad M(z) = \frac{z-i}{z+i}, \qquad M^{-1}(w) = i\cdot\frac{1+w}{1-w}$$

Wir wissen schon dass $M(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{D}$.

Lemma 3.2.4. *Die Einschränkung $M_{|\mathbb{H}}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ ist eine Bijektion die Geraden im Poincare-Halbebene-Modell zu Geraden im Poincare-Scheibe-Modell schickt, während $M^{-1}_{|\mathbb{D}}$ Geraden im Poincare-Scheibe-Modell zu Geraden im Poincare-Halbebene-Modell schickt.*

Beweis. Sei $z = x + iy \in \mathbb{H}$, so dass $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Denn

$$|\frac{z-i}{z+i}|^2 = |\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}|^2 = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2+1-2y}{x^2+y^2+1+2y} < 1.$$

Das zeigt, dass $M(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{D}$. Wir zeigen nun, dass $M^{-1}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{H}$: sei $w \in \mathbb{D}$, dann

$$M^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w} = i\frac{1+w}{1-w} \cdot \frac{1-\overline{w}}{1-\overline{w}} = i\frac{(1+w)(1-\overline{w})}{|1-w|^2} = i\frac{w-\overline{w}+(1-|w|^2)}{|1-w|^2}$$

Der Imaginärteil von $M^{-1}(w)$ ist $\frac{1}{|1-|w|^2|} \cdot (1-|w|^2) > 0$, so dass $M^{-1}(w) \in \mathbb{H}$. Das zeigt, dass

$$M_{|\mathbb{H}} \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$$

eine Bijektion ist.

Die Cayley-Transformation und ihre Inverse sind also Bijektionen zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{D}$ und zwischen $\partial\mathbb{H}$ und $\partial\mathbb{D}$. Da es sich um Möbius-Transformationen handelt, schicken sie orthogonale verallgemeinerte Kreise zu orthogonalen verallgemeinerten Kreisen. Also schicken sie die hyperbolischen Geraden in $\mathbb{H}$ in hyperbolische Geraden in $\mathbb{D}$ und umgekehrt. □

Da die hyperbolischen Geraden in $\mathbb{H}$ die Axiome einer axiomatischen hyperbolischen Ebene erfüllen, muss dies auch für die Geraden in $\mathbb{D}$ gelten. Das zeigt, dass $\mathbb{D}$ ein axiomatische hyperbolische Ebene ist, und dass die Cayley-Transformation $M \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ ein Isomorphismus von Modellen der Inzidenzgeometrie ist.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 21.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Beispiel 3.2.5 (Beltrami-Klein-Modell der hyperbolische Ebene)**.** Der Beltrami-Klein-Modell der hyperbolische Ebene ist die Einheitsscheibe

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Wir setzen auch $\partial\mathbb{B} = S^1$. Die hyperbolische Geraden in diesem Modell sind die Sehnen von $\partial\mathbb{B}$.

Wir wollen prüfen, ob es sich tatsächlich um eine axiomatische hyperbolische Ebene handelt. Die Postulate in diesem Modell sind recht einfach direkt zu überprüfen. Wir werden jedoch das Poincare'sche Scheibenmodell durchgehen. Wir betrachten also die Abbildung

$$F \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad w \mapsto \frac{2w}{1+|w|^2}$$

Lemma 3.2.6. *Die Abbildung F induziert eine Bijektion $F_{|\mathbb{D}} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{B}$. Die Abbildung $F_{|\mathbb{D}}$ schickt Geraden im Poincare'schen Scheibenmodell zu Geraden im Bertrami-Klein-Modell, während $F_{|\mathbb{D}}^{-1}$ Geraden im Bertrami-Klein-Modell zu Geraden im Poincare'schen Scheibenmodell schickt.*

Beweis. Sei $w \in \mathbb{D}$, so dass $|w| < 1$. Wir wollen zeigen, dass

$$|F(w)| = \frac{2|w|}{1+|w|^2} < 1$$

und das ist äquivalent zu $2|w| < |w|^2 + 1$, was äquivalent zu $(|w|-1)^2 > 0$ ist. Das zeigt, dass $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{B}$ und um zu sehen dass $F_{|\mathbb{D}} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{B}$ bijektiv ist, können wir direkt sehen, dass die inverse Abbildung die folgende ist:

$$F_{|\mathbb{D}}^{-1} \colon \mathbb{B} \to \mathbb{D}, \qquad u \mapsto \frac{u}{1+\sqrt{1-|u|^2}}.$$

Wir zeigen nun, dass F hyperbolische Geraden im Poincare-Modell $\mathbb{D}$ in Geraden im Beltrami-Klein-Modell $\mathbb{B}$ überführt. Man beachte zunächst, dass F sich bei reellen Drehungen gut verhält: Wir können reelle Drehungen in $\mathbb{C}$ als Multiplikationen mit einer komplexen Zahl $e^{i\theta}$ modellieren und sehen, dass

$$F(e^{i\theta} \cdot w) = \frac{e^{i\theta} \cdot w}{1 + |e^{i\theta}|^2 \cdot |w|^2} = e^{i\theta} \cdot \frac{w}{1 + |w|^2} = e^{i\theta} \cdot F(w)$$

Daher entsprechen Drehungen in $\mathbb{D}$ den gleichen Drehungen in $\mathbb{B}$ über F. Da hyperbolische Geraden in beiden Modellen durch Drehungen erhalten bleiben, genügt es zu zeigen, dass F eine gedrehte hyperbolische Gerade in $\mathbb{D}$ zu einer hyperbolischen Gerade in $\mathbb{B}$ schickt.

Wenn wir eine hyperbolische Gerade in $\mathbb{D}$ nehmen, können wir sie so drehen, dass sie orthogonal zur reellen Achse ist. Eine Möglichkeit ist dann, dass es sich um einen vertikalen Durchmesser handelt: $\mathbb{D} \cap i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in (-1, 1)\}$, so dass

$$F(\mathbb{D} \cap i\mathbb{R}) = \{F(iy) | y \in (-1, 1)\} = \{i\frac{2y}{1 + y^2} \mid y \in (-1, 1)\} = \mathbb{B} \cap i\mathbb{R}$$

und das ist eine hyperbolische Gerade in $\mathbb{B}$.

Die andere Möglichkeit, ist dass wir ein Kreissegment von einem Kreis mit Mittelpunkt auf der reelle Achse haben. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ der Mittelpunkt. Der einzige Kreis mit Mittelpunkt x_0, der orthogonal zu S^1 ist, muss S^1 in den Punkten $w = x + iy \in S^1$ so schneiden, dass $w - x_0$ und w orthogonal sind: das bedeutet

$$\begin{cases} x(x - x_0) + y^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = xx_0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{1}{x_0} \\ y & = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}} \end{cases}$$

Dies ist dann der Kreis $S = S_{x_0, \sqrt{x_0^2 - 1}}$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius $\sqrt{x_0^2 - 1}$ (insbesondere $x_0 < 1$). Sei $w = x + iy \in S$: das bedeutet

$$(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2 - 1 \iff x^2 + y^2 + 1 = 2x_0x$$

so dass

$$F(w) = \frac{2w}{1 + |w|^2} = \frac{2x + i2y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{2x}{2xx_0} + i\frac{2y}{2xx_0} = \frac{1}{x_0} + i\frac{y}{xx_0}$$

Man kann dann leicht zeigen, dass $F(\mathbb{D} \cap S)$ die Sehne zwischen $\frac{1}{x_0} + i\sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}}$ und $\frac{1}{x_0} - i\sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}}$ ist.

Dies zeigt, dass $F_{|\mathbb{D}}$ hyperbolische Geraden in $\mathbb{D}$ zu hyperbolischen Geraden in $\mathbb{B}$ schickt. Etwas Ähnliches gilt für $F_{|\mathbb{D}}^{-1}$. □

Dieses Lemma zeigt, dass $F_{|\mathbb{D}}$ ein Isomorphismus zwischen zwei Modellen einer axiomatischen hyperbolischen Ebene ist.

Beispiel 3.2.7 (Minkowski-Hyperboloid-Modell der hyperbolische Ebene)**.** Das Minkowski-Hyperboloid-Modell der hyperbolische Ebene ist die Menge in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 - 1, z > 0\}$$

Die hyperbolische Geraden sind die nicht-leere Schnittmengen von $\mathbb{M}$ mit den Ebene in $\mathbb{R}^3$ die durch 0 gehen:

$$\mathbb{M} \cap H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2 - 1, ax + by + cz = 0, z > 0\}$$

für $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so dass $\mathbb{M} \cap H \neq \emptyset$. Um zu prüfen, ob es sich um ein Modell der hyperbolischen Ebene handelt, werden wir eine Isomorphie dieses Modells mit dem Scheibenmodell von Poincare herstellen.Wir konstruieren es so: wir können die Poincare-Scheibe als $\mathbb{D} = \{(x, y, 0) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ betrachten. Dann nehmen wir den Punkt $P_0 = (0, 0, -1)$, und für jedes $P = (x, y, 0) \in \mathbb{D}$ betrachten wir die affine Gerade zwischen P_0 und P:

$$L(P_0, P) = \{(tx, ty, t - 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

Der Schnittpunkt dieser Linie mit $\mathbb{M}$ ist ein einzelner Punkt

$$L(P_0, P) \cap \mathbb{M} = \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right)$$

und das definiert eine Abbildung

$$G \colon \mathbb{D} \to \mathbb{M}, \qquad (x, y, 0) \mapsto \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right)$$

Diese Abbildung ist invertierbar: Um die Inverse zu berechnen, nehmen wir einen Punkt $Q \in \mathbb{M}$, betrachten die Linie zwischen Q und P_0 und nehmen den Schnittpunkt mit $\mathbb{D}$. Man kann berechnen, dass dies die folgende Abbildung definiert:

$$G^{-1} \colon \mathbb{M} \to \mathbb{D}, \qquad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z}, 0 \right)$$

Lemma 3.2.8. *G sendet hyperbolische Linien in $\mathbb{D}$ zu hyperbolischen Linien in $\mathbb{M}$ und G^{-1} sendet hyperbolische Linien in $\mathbb{M}$ zu hyperbolischen Linien in $\mathbb{D}$.*

Beweis. Wie im vorigen Fall ist das, was wir zeigen müssen, invariant für Translationen, dieses Mal um die z-Achse. Wenn wir also eine hyperbolische Gerade S in $\mathbb{D}$ nehmen, können wir durch eine Translation annehmen, dass sie orthogonal zur x-Achse ist. Eine Möglichkeit ist, dass dies der Durchmesser orthogonal zur x-Achse ist:

$$S = \{(0, y, 0) \,|\, y \in (-1, 1)\}$$

so dass

$$G(S) = \left\{ (0, \frac{2y}{1 - y^2}, \frac{1 + y^2}{1 - y^2}) \,|\, y \in (-1, 1) \right\} = \mathbb{M} \cap \{x = 0\}$$

Die andere Möglichkeit ist, dass S ein Segment eines Kreises mit Mittelpunkt $(x_0, 0, 0)$ und Radius $\sqrt{x_0^2 - 1}$ ist, für $x_0 > 1$: wenn $(x, y, 0) \in S$, dann $x^2 + y^2 = 2xx_0 - 1$, so dass

$$G(x, y, 0) = \left(\frac{x}{1 - xx_0}, \frac{y}{1 - xx_0}, \frac{xx_0}{1 - xx_0} \right)$$

und dann kann mann leicht zeigen, dass

$$G(S) = \mathbb{M} \cap \{z = x_0 \cdot x\}$$

Dies zeigt, dass G hyperbolische Geraden in $\mathbb{D}$ zu hyperbolischen Geraden in $\mathbb{M}$ schickt. Etwas Ähnliches gilt für G^{-1}. $\square$

Dieses Lemma zeigt, dass $F_{|\mathbb{D}}$ ein Isomorphismus zwischen zwei Modellen einer axiomatischen hyperbolischen Ebene ist.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 23.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

3.3 Hyperbolische Abstand

Wir wollen nun einen hyperbolischen Abstand oder Distanz in den zwei Poincaré modellen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{D}$ definieren. Wir wollen zuerst alle Möbiustransformationen die diese Modellen erhalten analysieren:

Proposition 3.3.1. *Sei $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ a Möbiustransformation.*

1. *Falls $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, dann*
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc>0$$
Für alle diese Transformationen gilt, dass $f(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ und, wenn $S \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade ist, dann ist $f(S)$ auch eine hyperbolische Gerade.

2. *Falls, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, dann*
$$f(z) = u\frac{z+a}{\overline{a}z+1}, \qquad \text{mit } u \in S^1, a \in \mathbb{D}$$
Für alle diese Transformationen gilt, dass $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und, wenn $S \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade ist, dann ist $f(S)$ auch eine hyperbolische Gerade.

Beweis. 1. Der entscheidende Punkt ist, dass eine solche Möbius-Transformation $\partial\mathbb{H}$ auf $\partial\mathbb{H}$ abbilden muss. Man könnte dies durch Stetigkeit beweisen, aber wir nehmen einfach an, dass dies wahr ist. Das bedeutet, dass $f(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, so dass
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad ad-bc \neq 0$$
Sei nun $z = x+iy \in \mathbb{H}$. Dann
$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} = \frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy} = \frac{((ax+b)+iay)((cx+d)-icy)}{|(cx+d)+icy|^2} \\ &= \frac{(ax+b)(cx+d)-acy^2}{|(cx+d)+icy|^2} + i\frac{ay(cx+d)-cy(ax+b)}{|(cx+d)+icy|^2} \\ &= \frac{(ax+b)(cx+d)-acy^2}{|(cx+d)+icy|^2} + i\frac{(ad-bc)y}{|(cx+d)+icy|^2} \end{aligned}$$
und wir sehen dass $f(x+iy) \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $ad-bc>0$.

Nehmen wir zum Schluss an, dass S eine hyperbolische Linie in $\mathbb{H}$ ist. Dann ist $S = \overline{S}\cap\mathbb{H}$, wobei $\overline{S} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ein verallgemeinerter Kreis ist, der orthogonal zu $\partial\mathbb{H}$ ist. Wir wissen, dass f orthogonale verallgemeinerte Kreise zu orthogonalen verallgemeinerten Kreisen schickt, so dass $f(S)$ und $f(\partial\mathbb{H}) = \partial HH$ noch orthogonal sind. Dann
$$f(S) = f(\overline{S})\cap\mathbb{H}) = f(\overline{S})\cap\mathbb{H}$$
eine hyperbolische Gerade.

2. Sei $M(z) = \frac{z-i}{z+i}$ die Cayley-Transformation, so dass $M(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ und sei f eine Möbiustransformation so dass $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Dann $g = M^{-1} \circ f \circ M$ hat die Eigenschaft dass $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, so dass

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$. Dann kann man $f = M \circ g \circ M^{-1}$ berechnen und zeigen dass f die Form die wir wollen hat. Die Aussage über hyperbolische Geraden kann man wie im Punkt (i) beweisen.

□

Lemma 3.3.2. *1. Seien $P, Q \in \mathbb{H}$ zwei Punkte. Dann existiert eine Möbiustransformation f so dass $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ und $f(P) = Q$.*

2. Seien $P, Q \in \mathbb{D}$ zwei Punkte. Dann existiert eine Möbiustransformation f so dass $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und $f(P) = Q$.

Beweis. 1. Nehmen wir zuerst an, dass $Q = i$ und dass $P = a + ib$ mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Die affine komplexe Transformation $f(z) = b^{-1}(z - a)$ erhaltet $\mathbb{H}$ und $f(P) = b^{-1}(ib) = i$. Wenn $Q \neq i$, dann existieren Möbiustransformationen f, g, die $\mathbb{H}$ erhalten und so dass $f(P) = i, g(Q) = i$. Dann $g \circ f^{-1}$ ist eine Möbiustransformation mit der Eigenschaft die wir wollen.

2. Sei M die Cayley-Transformation, so dass $M(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ und $M(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{D}$. Seien $P' = M^{-1}(P), Q' = M^{-1}(Q)$. Punkt (i) zeigt dass eine Möbiustransformation f die $\mathbb{H}$ erhaltet und so dass $f(P) = Q$ existiert. Dann ist $g = M \circ f \circ M^{-1}$ ist eine Möbiustransformation mit der Eigenschaft die wir wollen.

□

Definition 3.3.3 (Idealpunkte)**.** Sei S eine hyperbolische Gerade in $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{D}$. Diese Gerade ist teil eines verallgemeinertes Kreises $\overline{S} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und $\overline{S}$ trifft $\partial\mathbb{H}$ oder $\partial\mathbb{D}$ in zwei verschiedene Punkte. Diese Punkte sind die Idealpunkte von der hyperbolischen Gerade S.

Bemerkung 3.3.4. Sei $S \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade und sei f eine Möbiustransformation so dass $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Sei $\overline{S}$ der verallgemeinerter Kreis der S enthält und seien $\{P^*, Q^*\} = \overline{S} \cap \partial\mathbb{H}$ die Idealpunkte von S. Wir wissen dass $f(S)$ eine hyperbolische Gerade ist, und deren Idealpunkte sind $f(\overline{S}) \cap \partial\mathbb{H} = f(\overline{S} \cap \partial\mathbb{H}) = \{f(P^*), f(Q^*)\}$. Das zeigt, dass f Idealpunkte von S nach Idealpunkte von $f(S)$ schickt.

Ein ähnlicher Beweis gilt für Möbiustransformationen die $\mathbb{D}$ erhalten und für hyperbolische Geraden in $\mathbb{D}$. Endlich ein ähnlicher Beweis, zeigt auch dass, wenn $S \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade mit Idealpunkte P^*, Q^* ist, und wenn $M \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ die Cayleytransformation ist, dann sind $M(P^*), M(Q^*)$ die Idealpunkte von $M(S) \subseteq \mathbb{D}$.

Lemma 3.3.5. *Seien P, Q zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{D}$ und sei S die hyperbolische Gerade zwischen P, Q. Seien P^*, Q^* die Idealpunkte von S. Dann*

$$(P, Q; P^*, Q^*) > 0 \quad \text{und } (P, Q; Q^*, P^*) > 0$$

Beweis. Alle Punkte P, Q, P^*, Q^* sind in einem verallgemeinerten Kreis in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, so dass $(P, Q; Q^*, P^*) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ reell ist. Außerdem, sehen wir, dass $(P, Q; P^*, Q^*) = (P, Q; Q^*, P^*)^{-1}$

so dass ein ist positiv genau dann, wenn der anderer positiv ist. Nehmen wir zuerst an, dass $P, Q \in \mathbb{D}$. Es gibt eine Möbiustransformation f so dass $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ und $f(P) = 0$. Dann $(P, Q; P^*, Q^*) = (f(P), f(Q); f(P^*), f(Q^*))$ und die $f(P^*), f(Q^*)$ sind die Idealpunkte der hyperbolischen Gerade zwischen $f(P)$ und $f(Q)$. Wir können dann annehmen, dass $f(P) = 0$. Es gibt nun eine Drehung r_θ so dass $r_\theta(Q) = |Q| \in \mathbb{R}_{>0}$. Da diese Drehung eine Möbiustransformation die $\mathbb{D}$ erhaltet ist, können wir annehmen, dass $Q = |Q| \in \mathbb{R}_{>0}$. Die entsprechende Idealpunkte sind nun $P^* = -1, Q^* = 1$ und

$$(0, Q; P^*, Q^*) = (0, |Q|; -1, 1) = \frac{1 - |Q|}{1 + |Q|} > 0$$

Das zeigt die Aussage, wenn $P, Q \in \mathbb{D}$. Falls $P, Q \in \mathbb{H}$, betrachten wir die Cayleytransformation M: dann sind $M(P^*), M(Q^*)$ die Idealpunkte der hyperbolische Gerade in $\mathbb{D}$ zwischen $M(P), M(Q)$, so dass

$$(P, Q; P^*, Q^*) = (M(P), M(Q); M(P^*), M(Q^*)) > 0$$

da wir die Aussage in $\mathbb{D}$ schon bewiesen haben. □

Definition 3.3.6 (Hyperbolischer Abstand)**.** Seien $P, Q \in \mathbb{H}$ zwei verschiedene Punkte und sei S die hyperbolische Gerade zwischen die zwei Punkte. Seien auch P^*, Q^* die Idealpunkte von S. Wir definieren

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = |\log(P, Q; P^*, Q^*)|$$

Wenn $P = Q$, setzen wir

$$d_{\mathbb{H}}(P, P) = 0$$

Eine ähnliche Definition gilt für den hyperbolischen Abstand in $\mathbb{D}$: seien $P, Q \in \mathbb{D}$ zwei verschiedene Punkte und sei S die hyperbolische Gerade zwischen die zwei Punkte. Seien auch P^*, Q^* die Idealpunkte von S. Wir definieren

$$d_{\mathbb{D}}(P, Q) = |\log(P, Q; P^*, Q^*)|$$

Wenn $P = Q$, setzen wir

$$d_{\mathbb{D}}(P, P) = 0$$

Bemerkung 3.3.7. Der Abstand ist wohldefiniert, weil $(P, Q; Q^*, P^*) > 0$. Außerdem spielt die Reihenfolge, in der wir die idealen Punkte nehmen, keine Rolle, da

$$|\log(P, Q; P^*, Q^*)| = |\log(P, Q; Q^*, P^*)^{-1}| = |-\log(P, Q; Q^*, P^*)| = |\log(P, Q; Q^*, P^*)|$$

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 28.1.2025** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣