Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
26. Juni 2018

# Analysis 2

Übungsblatt 10

**Aufgabe 40: Das ebene Pendel**

Wir betrachten ein Pendel der folgenden Form: An einem dünnen Stab der Länge $\ell > 0$ ist ein Gewicht der Masse $m > 0$ aufgehängt und es wirkt die Gravitationskraft mit Gravitationskonstante $g > 0$. Das Pendel soll nur in einer Ebene schwingen und der Auslenkungswinkel zum Zeitpunkt $t$ relativ zur Ruhelage (das Pendel hängt senkrecht nach unten) werde mit $\varphi(t)$ bezeichnet.

Das Newtonsche Gesetz "Masse mal Beschleunigung = Kraft" liefert dann die folgende Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der Ruhelage als Funktion der Zeit:

$$m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t) = -m\,g\,\sin\varphi(t)\,.$$

Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Skizzieren Sie dann das zugehörige Vektorfeld (für $\ell = 1$ und $g = 1$) und einige Integralkurven. Interpretieren Sie die verschiedenen Typen von Integralkurven und besondere Punkte des Vektorfeldes.

*Hinweis:* Das zugehörige Vektorfeld lautet $v(x_1, x_2) = (x_2, -\frac{g}{\ell}\sin(x_1))$.

**Aufgabe 41: Getrennte Variable**

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem

$$\dot{\gamma}(t) = v(t, \gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0\,,$$

durch Trennung der Variable für

(a) $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = tx$

(b) $v : \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = \frac{t^2}{\sin(x)}$.

**Aufgabe 42: Eindeutigkeit von Lösungen?**

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\dot{\gamma} = v(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma(0) = -1$ und skizzieren Sie einige der Lösungen in einem Raum-Zeit-Diagramm!

**Aufgabe 43: Klassiche Mechanik**

Bewegt sich ein Teilchen der Masse $m > 0$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ unter dem Einfluss einer Kraft $F : D \to \mathbb{R}^3$, so löst die Bahnkurve des Teilchens $t \mapsto \gamma(t)$ die Gleichung

$$m\,\ddot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) \qquad\qquad \text{(Masse} \times \text{Beschleunigung = Kraft)}\,.$$

Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Gleichungen erster Ordnung.

Lösen Sie die Differentialgleichung erster Ordnung für beliebige Anfangsdaten im Fall eines Teilchens im homogenen Schwerefeld, also für $D = \mathbb{R}^3$ und $F(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -g)$, wobei $g > 0$ die Gravitationskonstante heißt.

*Hinweis:* Die Lösungen heißen auch Wurfparabeln.

**Aufgabe 44: Lipschitz-Stetigkeit**

a) Sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $v$ lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Sei nun $v : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $v|_K : K \to \mathbb{R}^n$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ Lipschitz-stetig ist.

*Hinweis:* Für (a) verwende man den Schrankensatz und für (b) Kontraposition.

**Aufgabe B4: Kettenlinie**

Dies ist eine freiwillige Aufgabe die sich auf Kapitel 7 zur Differentialrechnung in Banachräumen bezieht.

Betrachten Sie eine Kette der Länge $\ell > 2$. Die Kette ist aufgehängt an den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Dazwischen wird ihre Lage durch den Graph einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschrieben. Die Funktion $f$ ist dadurch bestimmt, dass sie die Energie

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

minimiert.

(a) Überlegen Sie sich, dass die Länge der Kurve durch

$$L(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

gegeben ist. Welcher Nebenbedingung muss die Funktion $f$ also gehorchen?

(b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $f$ her, die jeder kritische Punkt von $E$ unter der obigen Nebenbedingungen erfüllen muß.

(c) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

die Differentialgleichung für geeignete Wahl von $c$ löst. Zeigen Sie weiterhin, dass $a$ und $c$ durch Vorgabe von $\ell > 2$ eindeutig bestimmt sind.

*Abgabe:* Bis Dienstag 3.7. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.