Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Analysis 2

Übungsblatt 11

Aufgabe 45: Globale Existenz

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld, d.h. es existiere eine Konstante $L < \infty$, sodass $\|v(x) - v(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = v(\gamma) \quad \text{und} \quad \gamma(0) = x_0$$

existiert.

Tipp: Verwenden Sie die explizite Form der zunächst x_0-abhängigen unteren Schranke an das Existenzintervall der lokalen Lösung aus dem Satz von Picard-Lindelöf und die globale Lipschitz-konstante, um eine x_0-unabhängige untere Schranke an das Existenzintervall zu zeigen.

Aufgabe 46: Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L. Für $x \in G$ sei $\gamma_x : I(x) \to G$ die maximale Lösung der Differentialgleichung $\dot{\gamma} = v(\gamma)$ zum Anfangswert $\gamma_x(0) = x$.

Zu jedem $x_0 \in G$ und $t_* \in I(x_0)$ gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von x_0 so, dass $t_* \in I(x)$ für alle $x \in U$ (d.h. $\{t_*\} \times U \subset \Omega = \{(t, x) \,|\, t \in I(x)\}$). Das folgt aus der Offenheit von Ω, muss aber hier nicht gezeigt werden. Damit existiert also die Lösung $\gamma_x(t_*)$ für alle $x \in U$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U \to G\,, \qquad x \mapsto \gamma_x(t_*)\,,$$

stetig ist. Man sagt, dass die Lösung stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldartsellung von γ_x und das Lemma von Grönwall.

Aufgabe 47: Stetige Abhängigkeit vom Vektorfeld

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und $w : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichungen

$$\dot{\gamma} = v(\gamma) \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = x_0 \tag{1}$$
$$\dot{\alpha} = w(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha(0) = x_0 \tag{2}$$

und nehmen an, dass eine Lösung α von (2) auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $\tilde{I} \subset I(x_0)$ existiere. Hier bezeichnet $I(x_0)$ wie immer das Existenzintervall der eindeutigen maximalen Lösung γ von (1).

Zeigen Sie, dass dann für $t \in \tilde{I}$ gilt

$$\|\gamma(t) - \alpha(t)\| \leq |\tilde{I}|\, \|v - w\|_\infty\, \mathrm{e}^{Lt}\,,$$

die Lösungen zum selben Anfangswert x_0 also zunächst nahe beieinander bleiben, wenn sich die Vektorfelder nur wenig unterscheiden.

Aufgabe 48: Autonome, homogene, lineare Differentialgleichungen

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine reelle $n \times n$-Matrix und sei der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Operatornorm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\,, \quad t \mapsto \mathrm{e}^{At} := \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{t^j A^j}{j!}$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar ist.

Zeigen Sie dann, dass $\gamma(t) := \mathrm{e}^{At}x_0$ die Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{\gamma} = A\gamma$ zum Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Reihe in dem Banachraum $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ konvergiert, indem Sie nachweisen, dass die Partialsummenfolge eine Cauchyfolge ist. Dann zeigen Sie das Exponentialgesetz $\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{As} = \mathrm{e}^{A(t+s)}$ und die Differenzierbarkeit bei $t = 0$ und kombinieren alles.

Aufgabe 49: Qualitatives Verhalten und Stabilität von stationären Punkten

Wir betrachten die autonome Gleichung erster Ordnung $\dot{\gamma} = v(\gamma)$ zu dem Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y) \mapsto v(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-y}\sin(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(3x) \\ -\mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\cos(3x) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Lösungen dieses Systems zumindest qualitativ verstehen und gehen dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte, also die Nullstellen von v. (*Ergebnis:* $v(x, y) = 0$ genau dann wenn $y = 0$ und $x = n\frac{\pi}{2}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.)
- Bestimmen Sie die lineare Approximation des Vektorfelds $v(x, y)$ um die stationären Punkte (x_i, y_i), d.h. bestimmen Sie jeweils die Matrix $Dv|_{(x_i,y_i)}$ für die ja dann

  $$v(x, y) = Dv|_{(x_i,y_i)} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} \; + \; o(\|(x - x_i, y - y_i)\|)$$

  gilt. Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte von $Dv|_{(x_i,y_i)}$ und diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen in der Nähe des jeweiligen stationären Punktes, indem Sie dort das Vektorfeld und einige zugehörige Integralkurven skizzieren.
- Überlegen Sie sich, wie das Vektorfeld für $y \gg 0$ und für $y \ll 0$ jeweils aussieht und skizzieren Sie das Vektorfeld und einige Integralkurven auch außerhalb der kritischen Punkte. Skizzieren Sie insbesondere die Separatrizen, also diejenigen Integralkurven, die Gebiete qualitativ unterschiedlicher Lösungen im Phasenraum voneinander abgrenzen. (Beim ebenen Pendel ist die Integralkurve, welche die instabile Gleichgewichtslage mit sich selbst verbindet, eine Separatrix.)
- Für welche Anfangsdaten erwarten Sie globale Existenz von Lösungen, also $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$?

Hinweis: Um Ihre Ergebnisse zu überprüfen, können Sie auch ein Programm wir MatLab (kostenlos beim ZDV erhältlich) oder Mathematica verwenden, um das Vektorfeld und einige Integralkurven zu plotten. (Suchen Sie in der Dokumentation nach Stream Line Plot oder Stream Plot.) Mathematica ist auch über die WolframAlpha Webpage teilweise zugänglich. Dort erhalten Sie den Plot z.B. mit dem Befehl

$$StreamPlot[\{Exp[-y] * Sin[x] + Exp[y] * Sin[3x], -Exp[-y] * Cos[x] + Exp[y] * Cos[3x]\},$$
$$\{x, -0.1, 2 * Pi + 0.1\}, \{y, -1, 2\}]$$

Abgabe: Bis Dienstag 10.7. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.