Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
17. Juli 2018

Analysis 2

Übungsblatt 13

Aufgabe 54: Integration durch Differentiation nach Parametern

Bestimmen Sie das Integral $\int_0^x t^n \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals

$$\alpha \mapsto I(\alpha) = \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t \,.$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 55: Integral über Normalbereiche

Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Fassen Sie die Fläche unter dem Graphen von f und überhalb der x-Achse als x-Normalbereich $A \subset \mathbb{R}^2$ auf und berechnen Sie die Fläche von A durch Integration über den Normalbereich A.

Berechnen Sie dann das Integral der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$, über A für den Fall $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, also

$$\int_A g(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) \,.$$

Aufgabe 56: Integration in Kugelkoordinaten

Sei $X = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^3$ dann ist $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta) =: (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$$

ein Diffeomorphismus und beschreibt Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$ (vgl. Aufgabe 25 auf Blatt 6).

Stellen Sie die folgenden Funktionen in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie jeweils mit Hilfe der Transformationsformel das Integral über die Einheitskugel $B := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$:

(a) $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 1$

(b) $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = x^2 + y^2$

Abgabe: Bis Dienstag 24.7. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.