Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
24. April 2018

Analysis 2

Übungsblatt 2

Aufgabe 4: Eine nicht vollständige Metrik auf $\mathbb{R}$

Finden Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ so, dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.
Hinweis: Konstruieren Sie eine Metrik, bzgl. derer $x_n = n$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei hilft Ihnen beispielsweise eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $(-1, 1)$ und Beispiel 1.7 (e) aus der Vorlesung.

Aufgabe 5: Konvergenz in metrischen Räumen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik.

(a) Zeigen Sie: Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $a \in X$ (gemäß Definition 1.22 aus der Vorlesung), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N: \; d(x_n, a) < \varepsilon.$$

(b) Zeigen Sie: Eine Folge (x_ν) in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $(x_{\nu,j})$ in $\mathbb{R}$ gegen a_j konvergiert, also

$$\lim_{\nu \to \infty} x_{\nu,j} = a_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 6: Inneres und Rand

Zeigen Sie ausgehend von Definition 1.19 aus der Vorlesung:

(a) $\mathring{Y}$ ist die Menge der inneren Punkte von Y.

(b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von $Y \subset X$, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus Y als auch einen Punkt aus $X \backslash Y$ enthält.

(c) Bestimmen Sie das Innere und den Rand von

$$M := [0, 1] \backslash \left\{ \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 7: Stetige Funktionen auf metrischen Räumen

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik.

(a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, ist genau dann stetig, wenn alle $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetig sind.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus Aufgabe 5 und die Tatsache, dass es nach Proposition 2.6 genügt, die Folgenstetigkeit der jeweiligen Funktionen nachzuweisen.

Aufgabe 8: Der Abstand zu einer Menge

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $T \subset X$ definieren wir die Abbildung

$$d_T : X \to \mathbb{R}, \quad d_T(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in T\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{T} = \{x \mid d_T(x) = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass d_T stetig ist.

Abgabe: Bis Montag 30.4. im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.