Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
30. April 2018

Analysis 2

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Äquivalenz von Metriken

Formulieren Sie ausgehend von der Definition äquivalenter Normen aus der Vorlesung eine analoge Definition für die Äquivalenz von Metriken. Zeigen Sie dann folgende Aussagen:

Sind d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf einer Menge X, $O \subset X$, (x_n) eine Folge in X und $a \in X$. Dann gelten

(a) O ist offen in (X, d_1) $\quad\Leftrightarrow\quad$ O ist offen in (X, d_2)

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ in (X, d_1) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ in (X, d_2)

Bemerkung: In Aufgabe 4 hatten Sie eine Metrik auf $\mathbb{R}$ konstruiert, die nicht äquivalent zur Standardmetrik (also der euklidischen Metrik) auf $\mathbb{R}$ ist. Anders als im Fall von Normen (warum?) sind also nicht alle Metriken auf endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent.

Aufgabe 10: Stetige Funktionen?

(a) An welchen Punkten ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Sei $V := C^1_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty < \infty \text{ und } \|f'\|_\infty < \infty\}$ der Raum der beschränkten stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung und $W := C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten V und W versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ als normierte Räume. Zeigen Sie, dass die Ableitung als Abbildung $D : V \to W$, $f \mapsto D(f)$, mit $D(f)(x) := f'(x)$ an keinem Punkt $f \in V$ stetig ist.

Hinweis: Finden Sie eine konvergente Folge (f_n) in $(C^1_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ so, dass die Folge $(D(f_n)) = (f_n')$ in $(C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht konvergiert. Das zeigt, dass die Funktion am Punkt $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ nicht stetig ist. Dann verwenden Sie die Linearität der Abbildung D um zu zeigen, dass D nirgends stetig ist.

Aufgabe 11: Zum Banachschen Fixpunktsatz

(a) Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raums (X, d), $\phi : A \to A$ eine Kontraktion mit Liptschitzkonstante $\theta < 1$, $x_0 \in A$ und $a := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Limes der zugehörigen Iterationsfolge

$$x_{n+1} := \phi(x_n)\,.$$

Zeigen Sie, dass $d(x_n, a) \leq \theta^n d(x_0, a)$.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass ϕ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \|\phi'\|_\infty$ ist. Insbesondere ist ϕ also eine Kontraktion, wenn $\|\phi'\|_\infty < 1$ und $\phi(I) \subset I$ ist.

Hinweis: Erster Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Aufgabe 12: Das Newton-Verfahren und der Banachsche Fixpunktsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Machen Sie sich klar, dass

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \phi(x)\,.$$

Es ist also a genau dann Nullstelle von f wenn a Fixpunkt von ϕ ist. Das Newton-Verfahren besteht nun darin, die Nullstellen von f durch Iterationsfolgen $x_{n+1} = \phi(x_n)$ zu approximieren.

(a) Überlegen Sie sich zunächst geometrisch anhand einer Zeichnung warum zu erwarten ist, dass die Folge (x_n) gegen eine Nullstelle von f konvergiert, falls der Startwert x_0 hinreichend nahe an einer Nullstelle liegt.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass f bei $a \in \mathring{I}$ eine Nullstelle hat, also $f(a) = 0$ gilt, und setzen $I_0 := [a - \delta_0, a + \delta_0]$ mit $\delta_0 > 0$ so klein, dass $I_0 \subset I$.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 11 (b), dass $\phi|_{I_0}$ eine Kontraktion ist, wenn man $\delta_0 > 0$ klein genug wählt, also $\phi(I_0) \subset I_0$ und $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \theta_0 |x - y|$ für ein $\theta_0 < 1$ und alle $x, y \in I_0$ gilt.

Zwischenergebnis: Man kann $\theta_0 = K\delta_0$ wählen, wobei $K = \frac{c_1 c_2}{c_3}$ mit $c_1 = \sup_{x \in I_0} |f'(x)|$, $c_2 = \sup_{x \in I_0} |f''(x)|$ und $c_3 = \inf_{x \in I_0} |f'(x)|^2$.

Insbesondere konvergiert also das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in I_0$ gegen die Nullstelle a, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ für die Iterationsfolge $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

(c) Geben Sie eine Schranke für den Fehler im $n$ten Schritt an, also ein $S_n < \infty$ so, dass $|x_n - a| \leq S_n$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.
Hinweis: Augabe 11 (a).

(d) Verbessern Sie die Schranke aus (c) (d.h. finden Sie eine kleinere Schranke s_n), indem Sie die Newton-Iteration auf einer Folge von geeigneten Intervallen $I_n := [a - \delta_n, a + \delta_n]$ betrachten und jeweils auch θ_n neu abschätzen.

Ergebnis: Es gilt $|x_n - a| \leq \theta_0^{2^n - 1} |x_0 - a|$.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren in diesem Fall für alle Startwerte $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $a = \sqrt{2}$ konvergiert. Geben Sie für den Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$ unter Verwendung von Teil (d) eine explizite Schranke an den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$ im $n$ten Schritt an. Wieviele Schritte sind also nötig, um 15 Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu berechnen?

Abgabe: Bis Dienstag 8.5. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.