Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
8. Mai 2018

Analysis 2

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Funktionenfolgen

Geben Sie Beispiele für Funktionenfolgen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und Funtionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit den jeweiligen Eigenschaften an.

(a) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das **nicht** stetig ist.

(b) f_n ist stetig für alle n und die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber **nicht** gleichmäßig gegen ein stetiges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(c) f_n ist stetig differenzierbar für alle n und die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das **nicht** differenzierbar ist.

Hinweis: Zu (a) gab es bereits ein Beispiel in Analysis 1. Zu (b) und (c) ist es hilfreich, sich zunächst eine möglichst einfache Funktionenfolge mit der jeweiligen Eigenschaft zu skizzieren und erst dann entsprechende explizite Abbildungen zu konstruieren.

Aufgabe 14: Gleichmäßige Stetigkeit

Genau wie in Analysis 1 für Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert man auch für Funktionen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y den Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit*: Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass für alle $a \in X$ gilt

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))\,.$$

Machen Sie sich zunächst nochmals klar, was genau der Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit ist.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto f(x,y) := (y, x^2)$. Entscheiden Sie ob f stetig bzw. gleichmäßig stetig ist und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.
Hinweis: Kontraposition und Bolzano-Weierstraß führen zum Ziel.

Aufgabe 15: Separabilität

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Konstruieren Sie eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass jeder Punkt in X Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

Hinweis: Konstruieren Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ endliche Überdeckungen durch $\frac{1}{n}$-Kugeln und verwenden Sie diese zur Konstruktion der gesuchten Folge.

Bemerkung: Ein topologischer Raum X heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge $D \subset X$ gibt, die dicht in X liegt. Man sagt, dass D dicht in X liegt, wenn jede nichtleere offene Menge in X mindestens einen Punkt aus D enthält. Somit haben Sie gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist. Ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ auch separabel?

Aufgabe 16: Kompaktheit von Folgen und Eindeutigkeit von Grenzwerten

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und sei $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Zeigen Sie, dass M genau dann kompakt ist, wenn $a \in M$ gilt.

Hinweis: Eine Richtung wurde in der Vorlesung bereits gezeigt, für die andere kann z.B. Bolzano-Weierstraß zusammen mit der Eindeutigkeit von Grenzwerten in metrischen Räumen (Lemma 3.8) verwendet werden.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch in topologischen Räumen mit der Hausdorff-Eigenschaft.

(b) Dass Grenzwerte von Folgen in allgemeinen topologischen Räumen nicht eindeutig sein müssen, sieht man an folgendem drastischen Beispiel: Sei X eine Menge versehen mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, d.h. $\emptyset$ und X sind die einzigen offenen Mengen. Zeigen Sie, dass jede Folge in X gegen jeden Punkt in X konvergiert.

Aufgabe B1: Gebiete und Zusammenhang

(a) Zeigen Sie, dass jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gebiete in $\mathbb{R}$ genau die offenen Intervalle (a, b) mit $-\infty \le a < b \le \infty$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum zusammenhängend ist.

Hinweis: Teil (a) ist bei dieser Aufgabe am schwersten zu zeigen. Wenn Sie Teil (a) nicht hinbekommen, können Sie trotzdem die Teile (b) und (c) behandeln und die Aussage von (a) unbewiesen verwenden.

Bemerkung: Aufgabe B1 ist eine Bonusaufgabe und zählt nicht zum Gesamtpool der Aufgaben von dem 50% erreicht werden muss. Sie wird auch nur dann in der Übungsgruppe besprochen, falls genügend Zeit bleiben sollte.

Abgabe: Bis Dienstag 15.5. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.