Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
15. Mai 2018

Analysis 2

Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Die Einheitskugel in normierten Räumen

Der Satz von Heine-Borel aus der Vorlesung besagt insbesondere, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ in einem endlichdimensionalen normierten Raum V kompakt ist. Tatsächlich kann man auch die Umkehrung zeigen: ist die Einheitskugel in einem normierten Raum kompakt, so hat der Raum endliche Dimension. Wir werden in dieser Aufgabe allerdings nur zwei Beispiele unendlichdimensionaler normierte Räume kennenlernen, deren Einheitskugel nicht kompakt ist.

(a) Sei $\ell^2_{\mathbb{R}} := \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen mit der Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2_{\mathbb{R}}$. Wir stellen uns hier also geometrisch den unendlichdimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^\infty$ vor. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ in $(\ell^2_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_2)$ nicht kompakt ist.

(b) Betrachte den Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

Hinweis: Finden Sie jeweils eine Folge in $K_1(0)$, die keine konvergente Teilfolge hat, und argumentieren Sie mit Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 18: Partielle Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, wobei die partiellen Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

(b) Untersuchen Sie $\partial_x \partial_y g$ auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

(c) Sei f wie in Aufgabe 10 (a) auf Blatt 3. Zeigen Sie, dass f überall partiell differenzierbar ist, obwohl f nicht stetig ist.

Aufgabe 19: Greensche Funktionen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n > 2$ gegeben durch $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\alpha}$. Bestimmen Sie α so, dass

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0.$$

Bemerkung: Die Lösung der Gleichung $\Delta f = \delta$ im $\mathbb{R}^n$ heißt Greensche Funktion des Laplaceoperators im $\mathbb{R}^n$. Hier ist δ die Delta-Distribution am Ursprung. Sie haben in der Aufgabe allerdings nur gezeigt, dass f die Gleichung $\Delta f = 0$ außerhalb des Ursprungs erfüllt.

Aufgabe 20: Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$

Skizzieren Sie die Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = (2x, -y)$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = (-y, x) \,,$$

indem Sie jeweils an hinreichend vielen Punkten (x, y) im $\mathbb{R}^2$ den Vektor $f(x, y)$ bzw. $g(x, y)$ einzeichnen.

Berechnen Sie in beiden Fällen sowohl die Divergenz als auch die Rotation des Vektorfeldes. Für eine partiell differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ ist $\operatorname{rot} h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\operatorname{rot} h(x, y) := \partial_1 h_2(x, y) - \partial_2 h_1(x, y)$.

Aufgabe 21: Identitäten für Gradient, Rotation und Divergenz

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) Für $f \in C^2(G)$ gilt $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

(b) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$.

(c) Für $g \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} g) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} g) - \Delta g$.

Hinweis: Satz von Schwarz.

Abgabe: Bis Dienstag 29.5. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.